Topologie algébrique
École Normale Supérieure, année 2019-2020

Geoffroy Horel

CHAPITRE 1

Théorie des catégories

1. Généralités

DÉFINITION 1.1. Une catégorie C est la donnée suivante.

- Un ensemble noté $\mathrm{Ob}(C)$ dont les éléments sont appelés les objets de C.
- Un ensemble $\mathrm{Hom}_C(x, y)$ pour toute paire (x, y) d'objets de C dont les éléments sont appelés les morphismes de x vers y.
- Un élément id_x dans $\mathrm{Hom}_C(x, x)$ pour tout objet x de C appelé l'identité de x.
- Des applications de compositions
$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_C(y, z) \times \mathrm{Hom}_C(x, y) &\to \mathrm{Hom}_C(x, z) \\ (f, g) &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$
pour tout triplet (x, y, z) d'objets de C.

Ces données doivent par ailleurs satisfaire les axiomes suivants.

- Pour toute paire d'objets (x, y) et tout élément f de $\mathrm{Hom}_C(x, y)$, on a
$$f \circ \mathrm{id}_x = f \text{ et } \mathrm{id}_y \circ f = f.$$
- Pour tout quadruplet (x, y, z, t) d'objets de C, et pour tout élément (f, g, h) de $\mathrm{Hom}_C(z, t) \times \mathrm{Hom}_C(y, z) \times \mathrm{Hom}_C(x, y)$, on a l'égalité
$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

NOTATION 1.2. On utilisera souvent des flèches pour symboliser les morphismes d'une catégorie. Ainsi la phrase "soit $f : x \to y$" est totalement équivalente à "soit f un élément de $\mathrm{Hom}_C(x, y)$". Il faut d'ailleurs noter que dans de nombreux textes le mot "flèche" est utilisé à la place du mot "morphisme".

REMARQUE 1.3. Cette remarque est un point un peu technique qui peut être ignoré sans nuire à la compréhension de la théorie. Il se trouve que de nombreux objets que l'on souhaiterait appeller catégories ne rentrent pas tout à fait dans le cadre de cette définition car leurs objets ne forment pas un ensemble. Il est par exemple bien connu qu'il ne peut pas exister d'ensemble des ensembles (paradoxe du barbier), cependant, on souhaiterait pouvoir parler de la catégorie des ensembles dont les objets sont les ensembles et les morphismes sont les applications entre ensembles. Ce problème peut être résolu en utilisant la théorie des univers de Grothendieck. En bref, on suppose qu'on dispose de deux modèles pour la théorie des ensembles, l'un dont les éléments sont appellés les petits ensemble et l'autre, contenant le premier, dont les éléments sont appellés les grands ensembles. On suppose aussi qu'il existe un grand ensemble des petits ensembles. On peut alors parler de la catégorie des ensembles. Ses objet forment un grand ensemble et ses morphismes sont des petits ensembles. Cet exemple nous incite à poser la définition suivante.

DÉFINITION 1.4. Une catégorie est dite localement petite si pour toute paire d'objets (x, y), l'ensemble des morphismes $\mathrm{Hom}_C(x, y)$ est un petit ensemble. Elle est dite petite si elle est localement petite et si son ensemble d'objets est petit.

REMARQUE 1.5. Dans ce cours, sauf mention du contraire, une catégorie est par défaut localement petite. De même un ensemble est par défaut petit.

EXEMPLE 1.6. Nous donnons quelques exemples de catégories.

- La catégorie vide notée $\varnothing$ est l'unique catégorie dont l'ensemble des objets est vide.

- À un ensemble partiellement ordonné $(E, \leq)$, on peut associer une catégorie notée E dont l'ensemble des objets est E et dont l'ensemble des morphismes est donné par la formule suivante
$$\mathrm{Hom}_E(x, y) = * \text{ si } x \leq y$$
$$\mathrm{Hom}_E(x, y) = \varnothing \text{ sinon.}$$
On se convaincra facilement qu'il existe un unique choix pour la composition.
- Étant donné un groupe G ou plus généralement un monoïde, on dispose d'une catégorie $\mathcal{B}G$ avec un unique objet $*$ et avec $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}G}(*, *) = G$. La composition est donnée par la multiplication du groupe. La donnée d'une catégorie avec un unique objet est exactement équivalente à la donnée d'un monoïde.
- Pour n un entier naturel, on note $[n]$ l'ensemble totalement ordonné $\{0, 1, \dots, n\}$. On note Δ la catégorie dont les objets sont les entiers naturels et telle que $\mathrm{Hom}_\Delta([n], [m])$ est l'ensemble des applications croissantes de $[n]$ dans $[m]$.
- On a déjà parle de la catégorie **Ens** dont les objets sont les (petits) ensembles et les morphismes sont les applications entre ensembles.
- La catégorie **Grp** est la catégorie dont les objets sont les groupes et dont les morphismes sont les morphismes de groupes.
- On peut de même définir la catégorie **Ab** des groupes abéliens, $\mathbf{Mod}_k$ des modules sur un anneau k, **Ann** des anneaux, etc.
- La catégorie **Top** est la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes sont les applications continues.
- La catégorie **Diff** dont les objets sont les variétés lisses et les morphismes sont les applications C^∞.

Définition 1.7. Soit C, une catégorie. Sa catégorie opposée notée C^{op} a les mêmes objets que C mais les morphismes sont donnés par l'équation
$$\mathrm{Hom}_C(x, y) = \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(y, x).$$
Si $g \in \mathrm{Hom}_C(x, y)$ et $f \in \mathrm{Hom}_C(y, z)$, on définit $g \circ f$ dans C^{op} comme la composée $g \circ f \in \mathrm{Hom}_C(x, z) = \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(z, x)$.

Définition 1.8. Soient C et D deux catégories. La catégorie produit $C \times D$ est la catégorie dont l'ensemble des objets est $\mathrm{Ob}(C) \times \mathrm{Ob}(D)$ et dont les ensembles de morphismes sont donnés par la formule
$$\mathrm{Hom}_{C \times D}((x, y), (x', y')) = \mathrm{Hom}_C(x, x') \times \mathrm{Hom}_D(y, y')$$

Définition 1.9. Soit C une catégorie, x, y, z et t quatre objets de C et $f : x \to y$, $g : y \to t$, $h : x \to z$, $i : z \to t$ quatre morphismes. On dit que le carré
$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & y \arrow[d, "g"] \\ z \arrow[r, "i"'] & t \end{tikzcd}$$
est commutatif si on a l'égalité $g \circ f = i \circ h$.

Remarque 1.10. On peut également parler de triangle commutatif, de pentagone commutatif, etc. Cette notion est simplement une façon visuelle de représenter une équation.

2. Foncteurs

Les catégories sont elle-mêmes des structures algébriques et il existe donc une notion de morphismes entre catégories.

Définition 1.11. Soit C et D deux catégories, un foncteur entre C et D est la donné d'une application $F : \mathrm{Ob}(C) \to \mathrm{Ob}(D)$ et d'applications également notées F de $\mathrm{Hom}_C(x, y)$ vers $\mathrm{Hom}_D(F(x), F(y))$ pour toute paire (x, y) d'objets de C. Cette donnée devant vérifier les axiomes suivants

- On a $F(\mathrm{id}_x) = \mathrm{id}_{F(x)}$ pour tout objet x de C.
- On a l'équation $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ pour toute paires (f, g) de morphismes de C dont la composition est bien définie.

Définition 1.12. Soient C, D et E des catégories et $F : C \to D$ et $G : D \to E$ des foncteurs. Alors, on peut définir un foncteur $G \circ F$ par les formules $G \circ F(x) = G(F(x))$ pour x un objet de C et $G \circ F(f) = G(F(f))$ pour f un morphisme de C.

On dispose aussi d'un foncteur identité $\mathrm{id}_C : C \to C$ pour toute catégorie. Il est donc possible de définir la catégorie **Cat** des petites catégories.

Exemple 1.13. Nous donnons quelques exemples de foncteurs.

- Un foncteur $F : \mathcal{B}G \to \mathbf{Set}$ est la donnée d'un ensemble muni d'une action du groupe G. En effet, si on note X l'ensemble $F(*)$ (où $*$ est l'unique objet de $\mathcal{B}G$), on constate que F induit un morphisme de monoïde
$$G \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(X, X)$$
qui est exactement équivalent à la donnée d'une action de G sur X.
- De même un foncteur $\mathcal{B}G \to \mathbf{Ab}$ est la donnée d'un groupe abélien muni d'une action additive de G, un foncteur de $\mathcal{B}G$ vers $\mathbf{Mod}_k$ est une k-représentation de G, etc.
- Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels munis de la relation d'ordre $\leq$. Un foncteur $\mathbb{N} \to \mathbf{Ens}$ est la donnée d'une collection d'ensembles X_n indexée par les entiers naturels et d'applications $f_n : X_n \to X_{n+1}$.
- On dispose d'un foncteur $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ens}$ qui envoie un groupe sur son ensemble sous-jacent. On appelle souvent U le "foncteur oubli". On peut définir des foncteurs similaires $\mathbf{Mod}_k \to \mathbf{Ens}$, $\mathbf{Ann} \to \mathbf{Ens}$.
- On dispose d'un foncteur $CC : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ens}$ qui envoie un espace topologique X sur l'ensemble des ses composantes connexes.
- Étant donnée une catégorie C, on dispose d'un foncteur $C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Ens}$ qui envoie une paire (x, y) d'objets de C sur $\mathrm{Hom}_C(x, y)$.

Exemple 1.14. Un foncteur $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$ est appellé un ensemble simplicial. En raison de l'importance des ces objets en théorie de l'homotopie, nous allons essayer d'en donner une description plus explicite. La donnée d'un foncteur $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$ est en particulier la donnée d'une famille d'ensemble $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ indexée par les entiers naturels. Il y a ensuite des applications $X_n \to X_m$ pour chaque applications croissante $[m] \to [n]$. On va donner des noms particuliers à certaines de ces applications. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n+1\}$, il existe une unique application injective croissante de $[n]$ vers $[n+1]$ dont l'image ne contient pas i. On appelle i-ème face de X et on note $d_i : X_{n+1} \to X_n$ l'application induite par la structure d'ensemble simplicial. De même étant donné $j \in \{0, \ldots, n\}$, il existe une unique application surjective croissante $[n+1] \to [n]$ qui envoie j et $j+1$ sur le même élément. On appelle j-ème dégénérescence de X et on note $s_j : X_n \to X_{n+1}$ l'application induite par la structure d'ensemble simplicial. Il n'est pas difficile de montrer que tout application croissante $[n] \to [p]$ peut s'écrire comme une composition des applications des deux types précédents. La structure d'ensemble simplicial est donc déterminée par les ensembles X_n et les applications de faces et de dégénérescences entre eux. Cependant la structure de la catégorie Δ impose certaines relations entre ces applications. Il n'est pas difficile de se convaincre que les relations suivantes doivent être satisfaites.

$$\begin{aligned}
&d_i \circ d_j = d_{j-1} \circ d_i \text{ si } i < j,\\
&s_i \circ s_j = s_j \circ s_{i-1} \text{ si } i > j,\\
&d_i \circ s_j = s_{j-1} \circ d_i \text{ si } i < j,\\
&d_i \circ s_j = \mathrm{id} \text{ si } i = j \text{ ou } i = j+1,\\
&d_i \circ s_j = s_j \circ d_{i-1} \text{ si } i > j+1.
\end{aligned}$$

Ce qui est plus difficile est de montrer que ces identités suffisent, de sorte qu'on peut définir un ensemble simplicial comme une collection $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ munie d'application de faces et de dégénérescences satisfaisant les identités ci-dessus. Ce résultat ne sera cependant pas utilisé dans ce cours.

On peut de même définir un groupe simplicial, un groupe abélien simplicial, un k-module simplicial, etc. comme un foncteur de Δ^{op} vers **Grp**, **Ab**, $\mathbf{Mod}_k$, etc. Dans chaque cas, il s'agit d'une suite d'objets $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans la catégorie considérée, muni de morphismes de faces et de dégénérescences satisfaisant les identités ci-dessus.

Exemple 1.15. Il existe un foncteur "groupe libre" $G : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Grp}$. Pour S un ensemble, on appelle mot simplifié de S un mot fini w dans l'alphabet $\{s, s \in S\} \sqcup \{s^{-1}, s \in S\}$ tel que pour tout s dans S, les mots ss^{-1} et $s^{-1}s$ ne soient pas des sous mots de w. On note $G(S)$ l'ensemble des mots simplifiés de S. Il existe une structure de groupe sur $G(S)$ dont l'élément neutre est le mot vide et le produit est donné par la concaténation des mots avec la règle que si un sous-mot de la forme ss^{-1} ou $s^{-1}s$ apparaît, on peut le supprimer. On a une injection ensembliste évidente $S \to G(S)$ et on peut vérifier que pour tout ensemble S et tout groupe H, un morphisme de groupe $G(S) \to H$ est complètement déterminé par sa restriction à $S \subset G(S)$. Il n'y a par ailleurs aucune condition sur ce que peut être cette restriction de sorte que l'application de restriction

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G(S), H) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(S, H)$$

est une bijection.

Exemple 1.16. De manière analogue, on peut construire un foncteur "groupe abélien libre" $\mathbf{Ens} \to \mathbf{Ab}$. Pour S, un ensemble, on note $\mathbb{Z}\langle S\rangle$ la valeur de ce foncteur. En tant qu'ensemble, il est l'ensemble des sommes formelles $\sum_{s\in S} a_s.s$ où les coefficients a_s sont des entiers presque tous nuls. Il existe une structure de groupe abélien évidente sur $\mathbb{Z}\langle S\rangle$. Par ailleurs l'injection $S \to \mathbb{Z}\langle S\rangle$ envoyant s sur $1.s$ induit une application de restriction

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathbb{Z}\langle S\rangle, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(S, M)$$

qui est une bijection.

On peut aussi construire exactement de la même façon un foncteur R-module libre pour R un anneau commutatif. Il suffit de demander à ce que les coefficients a_s de la construction précédente soient des éléments de R au lien d'être des nombres entiers. On notera $R\langle S\rangle$ ce foncteur.

Définition 1.17. Soient C et D deux catégories. Un foncteur $F : C \to D$ est dit pleinement fidèle si pour toute paire (x, y) d'objets de C, le foncteur F induit une bijection

$$\mathrm{Hom}_C(x, y) \to \mathrm{Hom}_D(F(x), F(y)).$$

Définition 1.18. Un morphisme $f : x \to y$ dans une catégorie C est un isomorphisme s'il existe un morphisme $g : y \to x$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_y$ et $g \circ f = \mathrm{id}_x$. On dit dans ce cas que g est l'inverse de f. Deux objets x et y sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme entre eux.

Remarque 1.19. Un argument standard d'algèbre montre que l'inverse d'un morphisme est unique lorsqu'il existe.

Remarque 1.20. Dans certaines catégories les isomorphismes portent un nom spécial, par exemple dans **Ens**, on les appelle bijections, dans **Top** on les appelle homéomorphismes dans **Diff** on les appelle difféomorphismes.

Proposition 1.21. *Soient $F : C \to D$ un foncteur entre deux catégories. Si f est un isomorphisme de C, alors $F(f)$ est un isomorphisme de D. De même si deux objets x et y de C sont isomorphes, $F(x)$ et $F(y)$ sont isomorphes.*

Preuve. La seconde affirmation découle de la première. Soit $f : x \to y$ un morphisme. Par définition, il existe g tel que $f \circ g = \mathrm{id}_y$ et $g \circ f = \mathrm{id}_x$. Les axiomes satisfaits par le foncteur F impliquent immédiatement que $F(g)$ est l'inverse de $F(f)$. □

Par la proposition précédente, disposer d'un foncteur d'une catégorie "compliquée" vers une catégorie plus simple est souvent un moyen efficace de prouver que deux objets ne sont pas isomorphes, en effet, il suffit de vérifier que leurs images par le foncteur ne sont pas isomorphes.

Exemple 1.22. Deux espaces topologiques qui n'ont pas le même nombre de composante connexes ne peuvent pas être homéomorphes. Deux groupes ne peuvent pas être isomorphes s'il n'existe pas de bijections entre leurs ensembles sous-jacents, etc.

La réciproque de la proposition ci-dessus n'est pas vraie en général. On retiendra néammois la proposition suivante.

Proposition 1.23. *Soit $F : C \to D$ un foncteur pleinement fidèle. Soit $f : x \to y$ un morphisme de C. Alors f est un isomorphisme si et seulement si $F(f)$ est un isomorphisme.*

Preuve. Soit $f : x \to y$ un morphisme tel que $F(f)$ est un isomorphisme. Il existe donc $h : F(y) \to F(x)$ tel que $F(f) \circ h = \mathrm{id}_{F(y)}$ et $h \circ F(f) = \mathrm{id}_{F(x)}$. Puisque F est pleinement fidèle, on peut trouver $g : y \to x$ tel que $F(g) = h$. Par définition d'un foncteur, on a alors $F(f \circ g) = \mathrm{id}_{F(y)}$ et $F(g \circ f) = \mathrm{id}_{F(x)}$. Une fois encore, la propriété de pleine fidélité de F implique que $f \circ g = \mathrm{id}_y$ et $g \circ f = \mathrm{id}_x$. □

3. Transformations naturelles

Définition 1.24. Soient C et D deux catégories et F et G deux foncteurs de C vers D. Une tranformation naturelle de F vers G est la donnée d'un morphisme $T(x) : F(x) \to G(x)$ pour tout objet x de C tel que pour tout morphisme $f : x \to y$ dans C, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "T(x)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(x) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(y) \arrow[r, "T(y)"'] & G(y) \end{tikzcd}$$

Exemple 1.25. Donnons quelques exemples de transformations naturelles. On invite le lecteur à utiliser ses connaissances mathématiques pour produire d'autres exemples.

- Pour F n'importe quel foncteur de C vers D, on dispose de la transformation naturelle identité de F notée id_F donnée par $\mathrm{id}_F(x) = \mathrm{id}_{F(x)}$.
- Pour tout groupe abélien A, il existe un unique morphisme $0 \to A$ (resp. $A \to 0$). On vérifie aisément que ces morphismes définissent des transformations naturelles du foncteur constant de valeur 0 vers le foncteur identité de la catégorie des groupes abéliens (resp. du foncteur identité vers le foncteur constant).
- Reprenons le foncteur groupe libre construit plus haut. On a dit que pour tout ensemble S, il existe une application ensembliste évidente $S \to G(S)$. On peut interpréter cette application comme une transformation naturelle $\mathrm{id}_{\mathbf{Ens}} \to U \circ G$ où $\mathrm{id}_{\mathbf{Ens}}$ désigne le foncteur identité de la catégorie des ensembles et $U \circ G$ est la composée des foncteurs U et G (on rappelle que U désigne le foncteur oubli de la catégorie des groupes vers celle des ensembles).
- Soit V un espace vectoriel sur un corps k. Il est classique qu'on dispose d'une inclusion
$$V \to (V^*)^*$$
de V vers son bidual qui envoie v sur $\phi \mapsto \phi(v)$. On vérifie que cela définit une transformation naturelle du foncteur identité de la catégorie $\mathbf{Vect}_k$ vers le foncteur $V \mapsto (V^*)^*$.
- Soit $U : \mathbf{Ann} \to \mathbf{Ens}$ le foncteur qui envoie un anneau sur son ensemble sous-jacent. Soit $V : \mathbf{Ann} \to \mathbf{Ens}$ le foncteur qui envoie un anneau sur l'ensemble des ses éléments inversibles. On a toujours une inclusion $A^\times \to A$ qui définit une transformation naturelle $V \to U$.
- Soit X un espace topologique. On note $CC(X)$ l'ensemble des composantes connexes de X, on dispose d'une application continue $X \to CC(X)$ (où $CC(X)$ est muni de la topologie quotient ; prendre garde au fait que ce n'est pas toujours la topologie discrète) qui envoie chaque point de X sur la composante connexe dans lequel il vit. On vérifie que cela définit une transformation naturelle du foncteur identité de $\mathbf{Top}$ vers le foncteur $X \mapsto CC(X)$.
- etc.

Remarque 1.26. Nous espérons que ces exemples mettent en évidence l'intuition derrière la notion de transformation naturelle. Si on dispose de foncteurs F et G de C vers D, une transformation naturelle est un morphisme $F(x) \to G(x)$ pour tout objet x de C qui peut se définir de façon uniforme pour tous les objets (c'est à dire sans faire de choix).

Étant donnés trois foncteurs F, G et H de C vers D et des transformations naturelles T de F vers G et U de G vers H, on peut construire une transformation $U \circ T$ par la formule $U \circ T(x) = U(x) \circ T(x)$. On a par ailleurs la transformation naturelle identité pour tout foncteur F. On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'on peut ainsi construire une catégorie dont l'ensemble des objets est l'ensemble des foncteurs de C à D et dont les morphismes sont les transformations naturelles. On note cette catégorie $\mathbf{Fon}(C, D)$.

Remarque 1.27. Les transformations naturelles sont des morphismes entre foncteurs, de même que les foncteurs sont des morphismes entre catégories. En langage savant cela se traduit par le fait qu'il existe une 2-catégorie des catégories. Sans entrer dans les détails, une 2-catégorie est une structure qui ressemble à une catégorie à part que les morphismes entre deux objets sont eux-même les objets d'une catégorie.

4. Préfaisceaux et lemme de Yoneda

Définition 1.28. Soit C une petite catégorie. La catégorie des préfaisceaux sur C est la catégorie $\hat{C}$ dont les objets sont les foncteurs $C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$ et dont les morphismes sont les transformation naturelles.

Remarque 1.29. On se restreint à C une petite catégorie pour s'assurer que la catégorie $\hat{C}$ est localement petite.

Définition 1.30. Soit C une petite catégorie et x un objet de C. On note h_x le préfaisceau qui envoie un objet y sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_C(y, x)$ et un morphisme $f : u \to v$ sur l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_C(v, x) &\to \mathrm{Hom}_C(u, x) \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

On appelle h_x le préfaisceau représenté par x.

On vérifie facilement qu'il existe un foncteur $C \to \hat{C}$ qui envoie x sur h_x et $f : x \to y$ sur la transformation naturelle

$$\mathrm{Hom}(-, x) \to \mathrm{Hom}(-, y)$$

donnée par la postcomposition par f.

Avant de pouvoir énoncer le lemme de Yoneda, nous avons besoin de fixer une notation. Soit C une petite catégorie, x un objet de C et F un objet de $\hat{C}$, alors on peut construire une application

$$Y_x : \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(h_x, F) \to F(x)$$

qui envoie $k : h_x \to F$ une transformation naturelle sur $k(x)(\mathrm{id}_x)$. Le lemme de Yoneda est l'énoncé suivant.

Lemme 1.31. *L'application Y_x est une bijection.*

Preuve. On construit une application Z_x qui va dans l'autre sens. Soit $a \in F(x)$. On définit alors $Z_x(a) : h_x \to F$ une transformation naturelle par la formule

$$\begin{aligned} Z_x(a)(u) : \mathrm{Hom}_C(u, x) &\to F(u) \\ f &\mapsto F(f)(a) \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $Z_x(a)$ est bien une transformation naturelle. Il faut alors vérifier que $Z_x \circ Y_x$ et $Y_x \circ Z_x$ sont les application identité de $\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(h_x, F)$ et $F(x)$ respectivement. □

Corollaire 1.32. *Le foncteur $C \to \hat{C}$ qui envoie x sur h_x est pleinement fidèle.*

PREUVE. Il faut montrer que pour toute paire d'objets x et y de C. l'application

$$\mathrm{Hom}_C(x,y) \to \mathrm{Hom}_C(h_x,h_y)$$

est une bijection. C'est exactement le lemme de Yoneda avec $F = h_y$. $\square$

COROLLAIRE 1.33. *Si deux objets x et x' sont tels que h_x et h'_x sont isomorphes comme préfaisceaux alors, x et x' sont isomorphes dans C.*

PREUVE. Il suffit d'appliquer la Proposition 1.23. $\square$

On appelle ce foncteur de C dans $\hat{C}$ le plongement de Yoneda.

REMARQUE 1.34. Ce corollaire contient en lui les résultat d'unicité d'objets construit par propriété universelle. Donnons un exemple, soient M et N deux groupes abéliens et soit $B_{M,N}$ le foncteur $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ qui envoie P sur l'ensemble des applications bilinéaires de $M \times N$ vers P. Ce foncteur peut se voir comme un préfaisceau sur $\mathbf{Ab}^{\mathrm{op}}$. L'existence du produit tensoriel est équivalente à l'affirmation que ce préfaisceau est isomorphes à $h_{M\otimes N}$. Le corollaire précédent affirme alors que le produit tensoriel est unique à isomorphisme près.

Dans le même ordre d'idée, on peut montrer purement catégoriquement l'isomorphisme $M \otimes N \cong N \otimes M$ sans utiliser de modèle explicite pour le produit tensoriel. Il suffit de construire un isomorphisme naturel entre les foncteurs $B_{M,N}$ et $B_{N,M}$. Soit P un groupe abélien, on dispose d'une bijection évidente

$$B_{M,N}(P) \cong B_{N,N}(P)$$

qui envoie une application bilinéaire $(m,n) \mapsto \phi(m,n)$ sur l'application bilinéaire $(n,m) \mapsto \phi(m,n)$. On vérifie facilement que cela définit bien un isomorphisme naturel.

On construirait de même l'isomorphisme d'associativité

$$(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P)$$

5. Adjonctions

DÉFINITION 1.35. Soient C et D deux catégories. Une adjonction est un triplet (F,G,i) où $F : C \to D$ est un foncteur $G : D \to C$ est un foncteur et i est un isomorphisme de foncteurs $C^{\mathrm{op}} \times D \to \mathbf{Ens}$

$$i : \mathrm{Hom}_D(F(-),-) \cong \mathrm{Hom}_C(-,G(-))$$

On appelle alors F l'adjoint à gauche et G l'adjoint à droite.

REMARQUE 1.36. On dit souvent, que le foncteur G est l'adjoint à droite de F et que le foncteur F est l'adjoint à gauche de G. En effet comme on le verra dans la Proposition 1.38, un adjoint à gauche ou à droite d'un foncteur est uniquement déterminé à isomorphisme près.

Étant donné une adjonction (F,G,i) entre les catégories C et D, on dispose pour tous les objets c de C d'un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_D(F(c),F(c)) \cong \mathrm{Hom}_C(c,G(F(c)))$$

et donc en particulier d'un morphisme $c \to G(F(c))$ qui correspond à l'identité de $F(c)$ par la bijection ci-dessus. On le nomme l'unité de l'adjonction en c. Dualement, pour d un objet de D, on a une bijection

$$\mathrm{Hom}_D(F(G(d)),d) \cong \mathrm{Hom}(G(d),G(d))$$

qui nous fournit un morphisme $FG(d) \to d$. On appelle ce morphisme counité de l'adjonction en d.

EXEMPLE 1.37. Voici quelques exemples d'adjonctions.

- On a déjà vu le foncteur groupe libre $G : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Grp}$ et le foncteur oubli $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ens}$. Comme on l'a observé, il existe une bijection

  $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G(S),H) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(S,H)$$

  On peut vérifier que cette bijection est en fait une transformation naturelle de sorte que le foncteur G est l'adjoint à gauche de U.

- De même le foncteur groupe abélien libre $\mathbb{Z}\langle - \rangle : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ab}$ est l'adjoint à gauche du foncteur oubli $U : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ens}$.
- Fixons un anneau commutatif k et M un k-module. On dispose d'un foncteur
$$\begin{aligned} F : \mathbf{Mod}_k &\to \mathbf{Mod}_k \\ N &\mapsto N \otimes_k M \end{aligned}$$
et d'un foncteur
$$\begin{aligned} G : \mathbf{Mod}_k &\to \mathbf{Mod}_k \\ N &\mapsto \mathrm{Hom}_k(M, N) \end{aligned}$$
où $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ désigne l'ensemble des morphismes k-linéaires de M vers N muni de sa structure évidente de k-module. On peut construire une adjonction dont l'adjoint à gauche est F et l'adjoint à droite est G. Il s'agit donc de construire un isomorphisme naturel
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_k}(N \otimes_k M, P) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_k}(N, \mathrm{Hom}_k(M, P))$$
Par la propriété universelle du produit tensoriel, un morphisme $N \otimes_k M \to P$ est la donnée d'une application bilinéaire $\phi : N \times M \to P$. À partir de ϕ, on peut construire un morphisme $N \to \mathrm{Hom}_k(M, P)$ qui envoie n sur $\phi(n, -)$. Inversement, étant donné un morphisme $g : N \to \mathrm{Hom}_k(M, P)$, on peut construire une application bilinéaire $\phi : N \otimes_k M \to P$ par la formule $\phi(n, m) = g(n)(m)$. On vérifie facilement que ces deux applications fournissent un isomorphisme naturel.
- Le foncteur $\mathbf{Top} \to \mathbf{Ens}$ qui envoie un espace topologique sur son ensemble sous-jacent possède un adjoint à droite et un adjoint à gauche. L'adjoint à gauche est le foncteur qui muni un ensemble de sa topologie discrète et l'adjoint à droite et le foncteur qui muni un ensemble de sa topologie grossière.

La proposition suivante affirme que si un foncteur admet un adjoint à droite, ce dernier est unique à isomorphisme près.

Proposition 1.38. *Soit $F : C \to D$ un foncteur. S'il existe deux adjonctions (F, G, i) et (F, G', i'), alors les foncteurs G et G' sont naturellement isomorphes.*

Preuve. Construisons un isomorphisme j de G à G'. Pour d un objet de D, on dispose d'un isomorphisme
$$\mathrm{Hom}_C(-, G(d)) \cong \mathrm{Hom}_C(-, G'(d))$$
induit par les les isomorphismes i et i'. Par le lemme de Yoneda, cela nous fournit un unique isomorphisme $j(d) : G(d) \to G'(d)$. Soit maintenant $f : d \to d'$ un morphisme. Considérons le diagramme commutatif suivant dans la catégorie des préfaisceaux sur C

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(-, G(d)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_D(F(-), d) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_C(-, G'(d)) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_C(-, G(d')) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_D(F(-), d') \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_C(-, G'(d'))
\end{tikzcd}$$

où les isomorphismes horizontaux sont induits par i et i' et les morphismes verticaux par f. Par définition de j, les lignes horizontales correspondent par l'isomorphisme de Yoneda aux isomorphismes $j(d) : G(d) \to G'(d)$ et $j(d') : G(d') \to G'(d')$. En utilisant encore Yoneda, on en déduit l'équation $G'(f) \circ j(d) \cong j(d') \circ G(f)$ qui est exactement dire que j est un isomorphisme naturel. □

6. Limites et colimites

Soit I une petite catégorie, et C une catégorie quelconque, on dispose d'un foncteur
$$\delta_I : C \to \mathrm{Fon}(I, C)$$
qui envoie l'objet x sur le foncteur $\delta_I(x)$ qui envoie tous les objets de I sur x et tous les morphismes de I sur id_x.

Définition 1.39. Soit $X : I \to C$ un foncteur. On dit qu'une paire (c, j), où c est un objet c de C et $j : X \to \delta_I c$ est une tranformation naturelle, est une colimite pour X si la composée

$$\mathrm{Hom}_C(c, -) \xrightarrow{\delta_I} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fon}(I,C)}(\delta_I(c), \delta_I(-)) \xrightarrow{j} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fon}(I,C)}(X, \delta_I(-))$$

est un isomorphisme de foncteurs.

De même on dit qu'une paire (d, j), avec $j : \delta_I d \to X$ une transformation naturelle, est une limite pour X si la composée

$$\mathrm{Hom}_C(-, d) \xrightarrow{\delta_I} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fon}(I,C)}(\delta_I(-), \delta_I(d)) \xrightarrow{j} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fon}(I,C)}(\delta_I(-), X)$$

est un isomorphisme de foncteurs.

Il arrive que des foncteurs $I \to C$ ne possèdent pas de limite (resp. colimite). Cependant si une limite (resp. colimite) existe, elle est unique à isomorphisme unique près par le lemme de Yoneda. Il n'est donc pas abusif de noter $\mathrm{colim}_I X$ ou $\lim_I X$ pour n'importe quel choix de colimite ou de limite pour X.

Remarque 1.40. Les notions de colimites et de limites sont duales l'une de l'autre. Plus précisément, si $X : I \to C$ est un foncteur, on peut considérer le foncteur $X^{\mathrm{op}} : I^{\mathrm{op}} \to C^{\mathrm{op}}$. La colimite de X^{op} est la limite de X et la limite de X^{op} est la colimite de X.

Théorème 1.41. *Soit $F : C \to D$ un adjoint à gauche. Soit I une petite catégorie. Soit $X : I \to C$, un foncteur. On suppose que X admet une colimite, alors le morphisme*

$$F \circ X \to F \circ \delta_I(\mathrm{colim}\, X) \cong \delta_I F(\mathrm{colim}_I X)$$

fait de $F(\mathrm{colim}_I X)$ la colimite du diagramme $F \circ X$.

De même si $F : C \to D$ est un adjoint à droite et si X admet une limite, alors l'application évidente

$$\delta_I F(\lim_I X) \cong F \circ (\delta_I \lim_I X) \to F \circ X$$

fait de $F(\lim_I X)$ la limite du diagramme $F \circ X$.

On peut résumer ce théorème informellement par le slogan “un adjoint à gauche préserve les colimites et un adjoint à droite préserve les limites”.

Preuve. On traite le cas des limites, l'autre cas se traite dualement. Il s'agit de montrer que $F(\lim_I X)$ représente le bon foncteur. On note $L : D \to C$ l'adjoint à gauche de F. On note également $\tilde{F} : \mathrm{Fon}(I, C) \to \mathrm{Fon}(I, D)$ le foncteur de postcomposition par F et $\tilde{L} : \mathrm{Fon}(I, D) \to \mathrm{Fon}(I, C)$ le foncteur de postcompostion par L. On a une structure d'adjonction sur ces deux foncteurs déduite de l'adjonction entre L et F

On a une suite d'isomorphisme de foncteurs $D^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_D(-, F(\lim_I X)) &\cong \mathrm{Hom}_C(L(-), \lim_I X) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fon}(I,C)}(\delta_I L(-), X) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fon}(I,C)}(\tilde{L}(\delta_I(-)), X) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fon}(I,D)}(\delta_I(-), \tilde{F}(X)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_D(-, \lim_I F \circ X)
\end{aligned}$$

□

On peut aussi poser la définition suivante.

Définition 1.42. Soit I une petite catégorie et C une catégorie. Si le foncteur $\delta_I : C \to \mathrm{Fon}(I, C)$ possède un adjoint à gauche (resp. à droite), on notera cet adjoint colim_I (resp. $\lim_I$) et on l'appellera le foncteur de I-colimite (resp. I-limite).

Cette définition n'est pas abusive grâce à la proposition suivante.

Proposition 1.43. *Si $X : I \to C$ est un foncteur, la counité de l'adjonction* $(\mathrm{colim}_I, \delta_I)$ *en X nous donne un morphisme $X \to \delta_I(\mathrm{colim}_I X)$ qui fait de* $\mathrm{colim}_I X$ *la colimite de X. Dualement l'unité de l'adjonction* $(\delta_I, \lim_I)$ *en X donne un morphisme $\delta_I(\lim_I X) \to X$ qui fait de* $\lim_I X$ *la limite de X.*

Preuve. Vérification immédiate. □

7. Exemples de limites et colimites

Étant donné un ensemble U, on peut considérer U comme une catégorie dont l'ensemble des objets est U et dont les seuls morphismes sont les identités. Un U-diagramme dans une catégorie C est simplement la donnée d'une famille d'objets de C indexée par U.

Définition 1.44. Soit $X : U \to C$ un U-diagramme dans C, sa limite lorsque elle existe est appellée le produit des objets $\{X(u)\}_{u\in U}$ et sa colimite est appellée le coproduit des objets $\{X(u)\}_{u\in U}$.

Explicitons ce qu'est le coproduit d'une famille $\{X(u)\}_{u\in U}$ d'objets de C. Il s'agit d'un objet Y de C avec la dónnée de morphismes $i_u : X_u \to Y$ pour tout u qui satisfaisant la propriété universelle suivante :

Pour tout Z dans C et toute familles de morphismes $j_u : X_u \to Z$, il existe un unique morphisme $f : Y \to Z$ tel que $f \circ i_u = j_u$ pour tout u. On laisse au lecteur le soin de se convaincre que cette définition est bien équivalente à celle de la section précédente . De même on laisse le soin au lecteur de formuler explicitement ce qu'est le produit de la famille $\{X(u)\}_{u\in U}$.

Exemple 1.45. Donnons quelques exemples de produits et de coproduits.

- Dans le catégorie des ensemble, le produit des objets $\{X(u)\}_{u\in U}$ est simplement l'ensemble produit $\prod_u X(u)$. Le coproduit des objets $\{X(u)\}_{u\in U}$ est l'union disjointe $\bigsqcup_u X(u)$.
- Dans la catégorie des groupes abéliens, le produit des objets $\{X(u)\}_{u\in U}$ est le produit des groupes abéliens et le coproduit des objets $\{X(u)\}_{u\in U}$ est la somme directe $\bigoplus_{u\in U} X(u)$.
- Dans la catégorie **Top** le produit d'une famille $\{X(u)\}_{u\in U}$ est simplement le produit ensembliste muni de la topologie produit. Le coproduit d'une famille $\{X(u)\}_{u\in U}$ est le coproduit ensembliste $\sqcup_{u\in U} X(u)$ muni de la topologie dans laquelle un sous ensemble est un ouvert si son intersection avec chacun des $X(u)$ est ouverte.

On note P l'ensemble partiellement ordonné des sous-ensembles stricts de $\{0, 1\}$. On vérifie sans peine qu'un foncteur F de P dans une catégorie C est la donné d'un diagramme de la forme suivante

$$\begin{tikzcd} X_\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \\ X_1 & \end{tikzcd}$$

De même un foncteur $P^{\mathrm{op}} \to C$ est la donnée d'un diagramme de la forme suivante

$$\begin{tikzcd} & X_0 \arrow[d] \\ X_1 \arrow[r] & X_\varnothing \end{tikzcd}$$

Définition 1.46. Soit C une catégorie, $X : P \to C$ un foncteur, la colimite d'un P-diagramme dans C est appellée somme amalgamée du diagramme. De même la limite d'un P^{op}-diagramme dans C est appellée produit fibré.

Explicitons la notion de somme amalgamée. Si on se donne

$$\begin{tikzcd} X_\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \\ X_1 & \end{tikzcd}$$

un diagramme dans C, sa colimite est un objet Y de C avec des morphismes $i_0 : X_0 \to Y$ et $i_1 : X_1 \to Y$ qui rendent commutatifs le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} X_\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[d, "i_0"] \\ X_1 \arrow[r, "i_1"'] & Y \end{tikzcd}$$

et satisfaisant la condition universelle suivante :

Pour tout objet Z de C et tous morphismes $j_0 : X_0 \to Z$ et $j_1 : X_1 \to Z$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \arrow[d, "j_0"] \\ X_1 \arrow[r, "j_1"'] & Z \end{tikzcd}$$

commute, il existe un unique morphisme $f : Y \to Z$ tel que $f \circ i_0 = j_0$ et $f \circ i_1 = j_1$.

La notion de produit fibré peut s'explicter de manière analogue (il faut simplement renverser le sens de toutes les flèches, voir Remarque 1.40).

Exemple 1.47. Donnons quelques exemples de sommes amalgamées et de produits fibrés.

- Soit

$$\begin{tikzcd} X_\varnothing \arrow[r] \arrow[d] & X_0 \\ X_1 & \end{tikzcd}$$

un P-diagramme dans **Ens**, alors sa somme amalgamée existe et est donnée par l'ensemble quotient $(X_0 \sqcup X_1)/\simeq$ ou $\simeq$ est la relation d'équivalence la plus fine qui identifie un point x_0 de X_0 avec un point x_1 de X_1 s'il existe un point de $X_\varnothing$ dont l'image dans X_0 est x_0 et l'image dans X_1 est x_1.
- Soit

$$\begin{tikzcd} & X_0 \arrow[d] \\ X_1 \arrow[r] & X_\varnothing \end{tikzcd}$$

un P^{op}-diagramme dans la catégorie **Ens**. Le produit fibré de ce diagramme existe et est donné par le sous-ensemble de $X_0 \times X_1$ contenant les paires (x_0, x_1) ayant la même image dans $X_\varnothing$.
- Si dans l'exemple précédent les trois ensemble X_0, X_1 et $X_\varnothing$ ont une structure de groupe (resp. groupe abélien, resp. k-module, resp. anneau), alors le produit fibré ensembliste est naturellement muni de la même structure et définit le produit fibré dans **Grp** (resp. **Ab**, $\mathbf{Mod}_k$, **An**). Ce n'est pas très suprenant, en effet on rappelle que dans chaque cas le foncteur oubli est un adjoint à droite, cela implique que les limites dans **Grp** (resp. **Ab**, $\mathbf{Mod}_k$, **An**) ont pour ensemble sous-jacent la limite correspondante dans **Ens**.
- Soit

$$\begin{tikzcd} X_\varnothing \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "i_1"'] & X_0 \\ X_1 & \end{tikzcd}$$

un P-diagramme dans **Ab**, alors sa somme amalgamée existe et est donnée par le groupe abélien quotient $(X_0 \oplus X_1)/\operatorname{im}(X_\varnothing)$ où $\operatorname{im}(X_\varnothing)$ désigne l'image du morphisme de groupe abéliens

$$\begin{aligned} X_\varnothing &\to X_0 \oplus X_1 \\ x &\mapsto i_0(x) + i_1(x) \end{aligned}$$

La somme amalgamée dans $\mathbf{Mod}_k$ se calcule par la même construction.

CHAPITRE 2

Groupe fondamental

1. Homotopie

On note I l'intervalle fermé $[0,1]$.

Définition 2.1. Soient $f_0 : X \to Y$ et $f_1 : X \to Y$ deux applications continues entre espaces topologiques. Une homotopie entre f_0 et f_1 est une application continue $h : I \times X \to Y$ telle que $h(0,-) = f_0$ et $h(1,-) = f_1$. S'il existe une homotopie entre f_0 et f_1, on dit qu'elles sont homotopes.

Proposition 2.2. *La relation d'homotopie est une relation d'équivalence entre applications continues de X dans Y.*

Preuve. Élémentaire. □

Notation 2.3. Si X et Y sont deux espaces topologique, on note $[X,Y]$ le quotient de l'ensemble des applications continues de X dans Y par la relation d'homotopie.

Exemple 2.4. L'ensemble $[*,X]$ s'identifie avec l'ensemble des composantes connexes par arcs de X. On note cet ensemble $\pi_0(X)$.

Proposition 2.5. *Si $f : X \to Y$ est homotope à g et $f' : Y \to Z$ est homotope à g' alors $f' \circ f$ est homotope à $g' \circ g$.*

Preuve. Par transitivité de la relation d'homotopie, il suffit de montrer que $f' \circ f$ est homotope à $g' \circ f$ et $g' \circ f$ est homotope à $g' \circ g$. Soit h une homotopie entre f et g, alors la composée

$$I \times X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g'} Z$$

fournit une homotopie entre $g' \circ f$ et $g' \circ g$. Soit h' une homotopie entre f' et g', alors la composée

$$I \times X \xrightarrow{\mathrm{id}_I \times f} I \times Y \xrightarrow{h'} Z$$

fournit une homotopie entre $f' \circ f$ et $g' \circ f$. □

On peut donc construire une catégorie **hTop** dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes entre deux espaces X et Y sont donnés par la formule

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{hTop}}(X,Y) = [X,Y].$$

Définition 2.6. Un isomorphisme dans la catégorie **hTop** est appelé une équivalence d'homotopie. Deux objets isomorphes de **hTop** sont dits homotopiquement équivalents. On peut également dire qu'ils ont le même type d'homotopie. Un espace X est dit contractile si l'unique application $X \to *$ est une équivalence d'homotopie.

Donnons deux exemples d'équivalences d'homotopies.

Définition 2.7. Une partie étoilée de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ tel que, si $x \in C$, alors $tx \in C$ pour tout $t \in [0,1]$.

Proposition 2.8. *Soit C une partie étoilée de $\mathbb{R}^n$. Alors C est contractile.*

Preuve. Notons $p : C \to *$ l'unique application et $i : * \to C$ l'inclusion du point 0 dans C. L'application $p \circ i$ est l'identité. L'application $i \circ p$ est homotope à l'identité de C par l'homotopie

$$h(t, x) = tx.$$

□

Proposition 2.9. *Soit $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ la sphère unité. L'inclusion $S^{d-1} \to \mathbb{R}^d - \{0\}$ est une équivalence d'homotopie.*

Preuve. Notons i cette inclusion et notons f l'application $\mathbb{R}^d - \{0\} \to S^{d-1}$ donnée par $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$. On a $f \circ i = \mathrm{id}_{S^1}$ d'autre part on peut construire une homotopie h entre $i \circ f$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{C}-\{0\}}$ par la formule

$$h(t, x) = x\|x\|^{-t}.$$

□

Définition 2.10. Un espace topologique pointé est une paire (X, x) où X est un espace topologique et x est un point de X appellé point base de X.

Il existe une catégorie $\mathbf{Top}_*$ des espaces topologiques pointés dont les morphismes sont les applications continues préservant le point base. On peut aussi parler d'homotopie entre deux applications continutes entre espaces topologiques pointés.

Définition 2.11. Soient $f_0 : (X, x) \to (Y, y)$ et $f_1 : (X, x) \to (Y, y)$ deux applications continues pointées entre espaces topologiques pointés. Une homotopie pointée entre f_0 et f_1 est une application continue $h : I \times X \to Y$ telle que $h(0, -) = f_0$ et $h(1, -) = f_1$ et pour tout $t \in I$, $h(t, x) = y$.

Notation 2.12. On note $[(X, x), (Y, y)]_*$ l'ensemble des applications continues pointées quotienté par la relation d'homotopie pointées. Lorsque le point base est évident, on se contente de noter $[X, Y]_*$.

Muni de cette définition, on peut construire comme précédemment une catégorie $\mathbf{hTop}_*$ dont les objets sont les espaces topologiques pointés et les morphismes sont donnés par le quotient des applications continues pointées par la relation d'homotopie pointée.

Définition 2.13. Soit $(X, *)$ un espace topologique pointé et i un entier positif, on définit $\pi_i(X, x)$ par la formule

$$\pi_i(X, x) = [(S^i, \omega), (X, x)]_*$$

où ω est n'importe quel point de la sphère de dimension i.

Par construction, les applications $(X, x) \mapsto \pi_1(X, x)$ sont des foncteurs de $\mathbf{hTop}_*$ vers $\mathbf{Ens}$. On verra plus tard dans ce cours que π_1 est en fait naturellement muni d'une structure de groupe et que π_i pour $i \geq 2$ est naturellement un groupe abélien.

2. Définition du groupe fondamental

Fixons d'abord quelques notations et quelques points de terminologie. On note I l'intervalle $[0, 1]$. Pour X un espace topologique, on appelle chemin de X une application continue $\gamma : I \to X$. Pour x un point de X on appelle lacet de X basé en x un chemin γ de X tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$.

Définition 2.14. Soient γ et γ' deux chemins de X telle que $\gamma(0) = \gamma'(0)$ et $\gamma(1) = \gamma'(1)$. Une homotopie à extrémités fixes entre γ et γ' est une application continue $h : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ telle que, pour tout t dans $[0, 1]$, on ait $h(0, t) = \gamma(t)$, $h(1, t) = \gamma'(t)$, $h(t, 0) = \gamma(0)$ et $h(t, 1) = \gamma(1)$. On dit que les chemins γ et γ' sont homotopes à extrémités fixes s'il existe une homotopie à extrémités fixes entre eux.

Notation 2.15. Pour γ et γ' deux chemins de X avec $\gamma(1) = \gamma'(0)$, on note $\gamma' * \gamma$ le chemin défini par la formule

$$\begin{aligned} \gamma' * \gamma(t) &= \gamma(2t) \text{ si } t \in [0, 1/2] \\ &= \gamma'(2t - 1) \text{ si } t \in [1/2, 1]. \end{aligned}$$

Pour γ un chemin de X, on note γ^{-1} le chemin de X donné par l'équation

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t).$$

PROPOSITION 2.16. *Soient γ et γ' sont deux chemins de X homotopes à extrémités fixes*

- *Si γ'' est un troisième chemin de X avec $\gamma''(0) = \gamma(1)$, alors $\gamma'' * \gamma$ est homotope à extrémité fixe à $\gamma'' * \gamma'$.*
- *Si γ'' est un troisième chemin de X avec $\gamma''(1) = \gamma(0)$, alors $\gamma * \gamma''$ est homotope à extrémité fixe à $\gamma' * \gamma''$.*
- *Le chemin γ^{-1} est homotope à extrémité fixe à $(\gamma')^{-1}$*

PREUVE. La preuve est facile et laissée au lecteur. □

PROPOSITION 2.17. *Soient γ, γ' et γ'' trois chemins de X avec $\gamma(1) = \gamma'(0)$ et $\gamma'(1) = \gamma''(0)$. Alors $(\gamma'' * \gamma') * \gamma$ est homotope à extrémité fixes à $\gamma'' * (\gamma' * \gamma)$.*

PREUVE. On introduit une notation simplificatrice. Soit γ n'importe quel chemin de X. Étant donné un intervalle fermé $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ avec $a \neq b$, on note $\gamma_{[a,b]}$ l'application $[a,b] \to X$ donnée par $\gamma \circ \phi$ où $\phi : [a,b] \to [0,1]$ est l'homéomorphisme $\phi(x) = \frac{x-a}{b-a}$. On définit alors une homotopie $h : I^2 \to X$ par la formule

$$\begin{aligned} h(s,t) &= \gamma_{[0,\frac{1+s}{4}]}(t) \text{ si } t \in [0, \frac{1+s}{4}], \\ &= \gamma'_{[\frac{1+s}{4},\frac{2+s}{4}]}(t) \text{ si } t \in [\frac{1+s}{4}, \frac{2+s}{4}], \\ &= \gamma''_{[\frac{2+s}{4},1]}(t) \text{ si } t \in [\frac{2+s}{4}, 1]. \end{aligned}$$

□

Dans la proposition suivante, pour x un point de x, on note c_x le chemin constant de valeur x.

PROPOSITION 2.18. *Soit γ un chemin de X, alors*

- *$\gamma^{-1} * \gamma$ est homotope à extrémité fixes à $c_{\gamma(0)}$.*
- *$\gamma * \gamma^{-1}$ est homotope à extrémités fixes à $c_{\gamma(1)}$.*
- *$\gamma * c_{\gamma(0)}$ est homotope à extrémités fixes à γ.*
- *$c_{\gamma(1)} * \gamma$ est homotope à extrémités fixes à γ.*

PREUVE. On traite le premier cas, le second est analogue et les deux derniers sont faciles. Pour s dans $[0,1]$, on note γ_s le chemin $\gamma_s(t) = \gamma(st)$. On a $\gamma_0 = c_{\gamma(0)}$ et $\gamma_1 = \gamma$. On construit une homotopie $h : I^2 \to X$ par la formule

$$h(s,t) = (\gamma_s^{-1} * \gamma_s)(t).$$

On a bien $h(0,t) = c_{\gamma(0)}$ et $h(1,t) = \gamma^{-1} * \gamma$. □

Nous pouvons maintenant définir le groupe fondamental.

DÉFINITION 2.19. Soit (X,x) un espace topologique pointé. Le groupe fondamental de X basé en x noté $\pi_1(X,x)$ est défini de la façon suivante.

- L'ensemble sous-jacent de $\pi_1(X,x)$ est l'ensemble des classes d'homotopies à extrémités fixes des chemins γ de X avec $\gamma(0) = \gamma(1) = x$.
- L'élément neutre est la classe du chemin constant c_x.
- La multiplication est l'opération $*$.

Les Propositions 2.16, 2.17 et 2.18 montrent respectivement que l'opération $*$ est bien définie lorsqu'on passe au quotient, que l'opération ainsi obtenue est bien associative et que tout élément a un inverse de sorte que $\pi_1(X,x)$ est effectivement un groupe.

Pour $f : (X,x) \to (Y,y)$ une application continue entre espaces pointés, on note $\pi_1(f)$ l'application qui envoie la classe d'un lacet γ sur la classe de $f \circ \gamma$.

PROPOSITION 2.20. *L'application $\pi_1(f)$ est bien définie et est un morphisme de groupe.*

Preuve. Il faut s'assurer que si γ et γ' sont homotopes à extrémités fixes, alors $f \circ \gamma$ et $f \circ \gamma'$ le sont également ce qui est évident. Par ailleurs, on a $f \circ c_x = c_y$ et $f \circ (\gamma * \gamma') = f \circ \gamma * f \circ \gamma'$ ce qui implique que $\pi_1(f)$ est bien un morphisme de groupe. $\square$

Proposition 2.21. *L'application π_1 ainsi définie est un foncteur $\mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$.*

Preuve. Il s'agit simplement de vérifier que $\pi_1(f \circ g) = \pi_1(f) \circ \pi_1(g)$. $\square$

Proposition 2.22. *Si f et g de (X, x) vers (Y, y) sont deux applications pointées continues homotopes, alors $\pi_1(f) = \pi_1(g)$.*

Preuve. Soit h une homotopie pointée entre f et g, alors $(s, t) \mapsto h(s, \gamma(t))$ est une homotopie à extrémité fixe entre $t \mapsto f \circ \gamma(t)$ et $t \mapsto g \circ \gamma(t)$. $\square$

Pour résumer le travail accompli jusqu'à maintenant, on a le théorème suivant.

Théorème 2.23. *Le groupe fondamental π_1 est un foncteur de la catégorie $\mathbf{hTop}_*$ vers la catégorie des groupes.*

Par ailleurs cette définition du groupe fondamental coïncide avec celle de la section précédente.

Proposition 2.24. *Il exsite une bijection naturelle en (X, x)*

$$a : \pi_1(X, x) \cong [(S^1, 1), (X, x)]_*$$

Preuve. Cette bijection est construite de la manière suivante : étant donné un lacet $\gamma : [0, 1] \to X$ basé en x, on a une application $a(\gamma) : S^1 \to X$ donnée par la formule $a(\gamma)(e^{2i\pi t}) = \gamma(t)$. On vérifie que si γ est homotope à extrémité fixe à γ' alors $a(\gamma)$ est homotope à $a(\gamma')$ de sorte que a définit bien une application

$$\pi_1(X, x) \to [(S^1, 1), (X, x)]_*$$

On laisse au lecteur le soin de construire un inverse à a. $\square$

Étudions la dépendance en le point base du groupe fondamental. On se donne un espace topologique connexe par arcs X, deux points x et y de X et $\gamma : [0, 1] \to X$ un chemin de x à y. Nous pouvons construire une application ensembliste

$$k_\gamma : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$$

qui envoie la classe d'homotopie du lacet $\lambda : [0, 1] \to X$ sur la classe d'homotopie de $\gamma * \lambda * \gamma^{-1}$. Par la Proposition 2.17, on peut parenthéser comme on le souhaite et par la Proposition 2.16 cela est bien indépendant du choix de λ dans sa classe d'homotopie.

Proposition 2.25. *L'application k_γ est un isomorphisme de groupe.*

Preuve. Montrons que k_γ est un morphisme de groupe. Soient λ et λ' deux lacets de X basés en x. On a

$$k_\gamma([\lambda * \lambda']) = [\gamma * \lambda * \lambda' * \gamma^{-1}] = [\gamma * \lambda * \gamma^{-1} * \gamma * \lambda' * \gamma^{-1}] = k_\gamma(\lambda) k_\gamma(\lambda').$$

Pour montrer que k_γ est un isomorphisme, il suffit d'observer que son inverse est donné par $k_{\gamma^{-1}}$. $\square$

3. Calcul du groupe fondamental du cercle

Notre modèle pour le cercle est l'ensemble S^1 des nombres complexes de module 1. On note $p : \mathbb{R} \to S^1$ l'application

$$p(t) = e^{2i\pi t}$$

Lemme 2.26 (Lemme du relèvement). *Soient B un espace topologique connexe et A un sous-espace connexe de B. Soit $i : A \to B$ l'inclusion. On suppose que l'on dispose d'un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "f"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

dans la catégorie des espaces topologique. On suppose que l'application f n'est pas surjective. Alors il existe une unique application $h : B \to \mathbb{R}$ telle que, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "h"] & S^1 \end{tikzcd}$$

les deux triangles soient commutatifs.

Preuve. Soit $z = e^{2i\pi u}$ un point de S^1 qui n'est pas dans l'image de f. Soit $U = S^1 - z$ et $V = p^{-1}(U)$. On observe qu'on a l'égalité

$$V = \coprod_{n \in \mathbb{Z}}]u+n, u+n+1[.$$

Par hypothèse, f se factorise par le sous-espace U et par commutativité du carré, g se factorise par V. Puisque l'espace A est connexe, il existe un unique n tel que g se factorise par $]u+n, u+n+1[$. On peut donc factoriser notre carré commutatif de la manière suivante

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] &]u+n, u+n+1[\arrow[r] \arrow[d, "p'"] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "f"'] & U \arrow[r] & S^1 \end{tikzcd}$$

où les applications horizontales du carré de droite sont les inclusions et l'application p' est la restriction de p. Puisque p' est un homéomorphisme, il existe une unique application $h' : B \to]u+n, u+n+1[$ telle que, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] &]u+n, u+n+1[\arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "h'"] & U \end{tikzcd}$$

les deux triangles commutent. La composée de h' avec l'inclusion $]u+n, u+n+1[\to \mathbb{R}$ fournit une application h qui satisfait aux conditions du lemme. L'unicité de h' implique l'unicité de h. $\square$

Le lemme suivant nous sera utile plusieurs fois.

Lemme 2.27. *Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de l'espace topologique $[0,1]^d$. Alors, il existe un entier n tel que, pour tout d-uplet $(k_1, \ldots, k_d)$ de nombres entiers dans $\{0, \ldots, n-1\}$, il existe un indice i tel que le cube*

$$\{\frac{1}{n}(k_1 + t_1, \ldots, k_d + t_d), (t_1, \ldots, t_d) \in [0,1]^d\}$$

soit entièrement contenu dans U_i.

Preuve. Avant de donner la preuve donnons une version moins formelle de l'énoncé. On dit simplement que, quitte à choisir n suffisament grand, on peut s'arranger pour que tous les cubes de la subdivision du cube $[0,1]^d$ en petit cubes de côté $1/n$ soient contenus dans l'un des ouverts du recouvrement.

Prouvons maintenant le lemme. Supposons alors que le lemme ne soit pas vérifié, on peut donc trouver, pour tout n, un point $x_n = \frac{1}{n}(k_1, \ldots, k_n)$ tel que tel que la boule fermée de rayon $1/n$ (pour la norme sup des valeurs absolues de coordonnées) ne soit contenue dans aucun des ouverts du recouvrement. Quitte à prendre une suite extraite, on peut supposer que la suite x_n converge. Notons x sa limite. Le point x est dans l'un des ouverts du recouvrement. On peut donc trouver ϵ tel que la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ soit entièrement contenue dans l'un des ouverts du recouvrement. D'un autre côté, quitte, à choisir n assez grand, la boule fermée de centre x_n et de rayon $1/n$ est entièrement contenue dans la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ ce qui est une contradiction. $\square$

PROPOSITION 2.28. *Soit $i : \{0\} \to I$ l'inclusion. Alors l'application $p : \mathbb{R} \to S^1$ a la propriété de relèvement unique par rapport à i. C'est-à-dire : pour tout carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[r] & S^1 \end{tikzcd}$$

il existe une unique application $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui fait commuter les deux triangles dans le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[r] \arrow[ur, "h"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

De même l'application p a la propriété de relèvement unique par rapport à l'inclusion

$$j : \{0\} \times I \to I^2.$$

PREUVE. On traite le cas de j, l'autre cas est analogue. On se donne un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I^2 \arrow[r, "g"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Recouvrons S^1 par deux ouverts de S^1 chacun des deux distincts de S^1 (on peut par exemple prendre les complémentaires des complexes 1 et -1). Par le Lemme 2.27, on peut donc trouver un entier positif N tel que la restriction de g à tout carré de la forme $[k/N,(k+1)/N] \times [l/N,(l+1)/N]$ avec k et l des nombres entiers soit contenue dans l'un des deux ouverts et donc soit non-surjective. On constuit ensuite l'application h de proche en proche. On commence par la construire sur le carré $[0,1/N] \times [0,1/N]$ en appliquant le lemme du relèvement en observant que h est déjà prescrite sur le côté gauche du carré qui est un sous-espace connexe. On construit ensuite h sur la carré $[1/N,2/N] \times [0,1/N]$ de manière analogue. Une fois que l'on a construit h sur toute la bande $[0,1] \times [0,1/N]$, on l'étend à la bande $[0,1] \times [2/N]$ en utilisant le même procédé. On continue de la sorte bande par bande jusqu'à avoir construit h sur le carré tout entier. $\square$

On va maintenant construire un morphisme de groupe

$$\delta : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}.$$

Soit $\gamma : [0,1] \to S^1$ une application continue telle que $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$. Par la proposition précédente, il existe une unique application $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et $\tilde{\gamma}(0) = 0$. En particulier $p(\tilde{\gamma})(1) = 1$ et donc $\tilde{\gamma}(1)$ est un nombre entier. On note ce nombre entier $\delta(\gamma)$. Commençons par montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 2.29. *La valeur de $\delta(\gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixes de γ. En d'autres termes, δ se factorise en une application d'ensembles*

$$\pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}.$$

PREUVE. Soient γ_0 et γ_1 deux application continues $[0,1] \to S^1$ telles qu'il existe une homotopie à extrémités fixes entre γ_0 et γ_1. Explicitement, il existe une application continue $H : [0,1] \times [0,1]$ satisfaisant les conditions suivantes

- On a les équations $H(0,t) = \gamma_0(t)$ et $H(1,t) = \gamma_1(t)$.
- On a $H(u,0) = H(u,1) = 1$.

On peut donc construire une application $\tilde{H} : I \times \{0\} \to \mathbb{R}$ donnée par la formule $\tilde{H}(u,0) = 0$. La proposition précédente nous dit qu'on peut prolonger $\tilde{H}$ de manière unique en une application $\tilde{H} : I^2 \to \mathbb{R}$ qui soit telle que $p \circ \tilde{H} = H$. La restriction de $\tilde{H}$ à l'intervalle $\{0\} \times I$ (resp. $\{1\} \times I$) doit être égale à $\tilde{\gamma_0}$ (resp. $\tilde{\gamma_1}$) par unicité du relèvement de γ_0 et γ_1. La restriction de $\tilde{H}$ à l'intervalle $I \times \{1\}$ fournit un chemin continu dans $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Ce chemin doit donc être constant et $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$ comme souhaité. □

PROPOSITION 2.30. *L'application δ est un morphisme de groupe*

$$\delta : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$$

PREUVE. On vérifie aisément que δ envoie le chemin constant sur 0.

Soient γ et γ' deux lacets $[0,1] \to S^1$. Soient $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'unique relèvement de γ avec $\tilde{\gamma}(0) = 0$. Soit $\tilde{\gamma}'$ l'unique relèvement de γ' avec $\tilde{\gamma}'(0) = 0$. Le chemin $\tilde{\gamma}' + \delta(\gamma)$ est donc l'unique relèvement de γ' prenant la valeur $\tilde{\gamma}(1)$ en 0. Ce chemin prend la valeur $\delta(\gamma) + \delta(\gamma')$ en 1. Clairement la concaténation $\tilde{\gamma} * (\tilde{\gamma}' + \delta(\gamma))$ est un relèvement de $\gamma * \gamma'$ qui vaut 0 en 0. Par unicité d'un tel relèvement, on a donc

$$\delta(\gamma * \gamma') = (\tilde{\gamma} * (\tilde{\gamma}' + \delta(\gamma)))(1) = \delta(\gamma) + \delta(\gamma')$$

On montrerait de manière analogue que $\delta(\gamma^{-1}) = -\delta(\gamma)$. □

PROPOSITION 2.31. *L'application δ est un isomorphisme de groupe.*

PREUVE. On commence par montrer la surjectivité de δ. Puisque l'image de δ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, il suffit de montrer que ce sous-groupe contient 1. Mais il est facile de vérifier que $1 \in \mathbb{Z}$ peut s'obtenir comme δ de l'application identité $S^1 \to S^1$.

Pour montrer l'injectivité de δ, on montre que son noyau est réduit à l'élément neutre. On considère donc un chemin $\gamma : [0,1] \to S^1$ qui est tel que $\delta(\gamma) = 0$. Il s'agit de montrer qu'il est homotope à un chemin constant. Par définition, γ admet un relèvement $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = 0$. On sait que $\pi_1(\mathbb{R}, 0) = 0$. On en déduit donc qu'il existe une homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ entre $\tilde{\gamma}$ et le lacet constant. On constate alors que $p \circ H$ est une homotopie entre γ et un chemin constant. □

On a donc calculé l'ensemble $[S^1, S^1]_*$ des classes d'homotopie pointées d' applications de S^1 vers S^1. On peut sans grandes difficultés en déduire l'ensemble $[S^1, S^1]$ des classes d'homotopies d'application non pointées.

PROPOSITION 2.32. *L' application évidente*

$$[S^1, S^1]_* \to [S^1, S^1]$$

est une bijection.

PREUVE. Noter que cette application n'est ni injective ni surjective a priori. En effet, il faut prendre garde au fait qu'il pourrait exister une homotopie ne préservant pas le point base entre deux applications pointées.

On va construire une application qui va dans l'autre sens. Etant donné $f : S^1 \to S^1$, on peut construire $\tilde{f}$ par la formule $\tilde{f}(z) = f(z)f(1)^{-1}$. Clairement $\tilde{f}$ est une application pointé. De même si $H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ est une homotopie, on peut construire $\tilde{H}$ par la formule $\tilde{H}(z,t) = H(z,t)H(1,t)^{-1}$. Si H est une homotopie entre $f = H(z,0)$ et $g = H(z,1)$, alors $\tilde{H}$ est une homotopie pointée entre $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$. On a donc construit une application

$$[S^1, S^1] \to [S^1, S^1]_*$$

Il est évident que la composée

$$[S^1, S^1]_* \to [S^1, S^1] \to [S^1, S^1]_*$$

est égale à l'identité. Pour montrer que la composée

$$[S^1, S^1] \to [S^1, S^1]_* \to [S^1, S^1]$$

est égale à l'identité, il s'agit de montrer que pour tout f, f et $\tilde{f}$ sont homotopes. Choisissons n'importe quel chemin γ reliant 1 à $f(1)$, alors, une homotopie entre f et $\tilde{f}$ est donnée par

$$H(z,t) = f(z)\gamma(t)^{-1}$$

□

À ce stade nous pouvons donner une preuve très rapide du théorème fondamental de l'algèbre.

THÉORÈME 2.33. *Soit $f(z)$ un polynôme à coefficients complexes sans racines, alors f est constant.*

Preuve. Notons d le degré de f. Sans perte de généralité, on suppose que le coefficient de z^d est 1. On choisit un homéomorphisme ϕ entre $I = [0,1[$ et $[0,+\infty[$, on peut par exemple prendre $\phi(t) = \tan(t\pi/2)$. On considère l'application $H : S^1 \times [0,1[\to S^1$ donnée par la formule

$$H(z,t) = \frac{f(\phi(t)z)}{|f(\phi(t)z)|}$$

On peut prolonger H par continuité en $t = 1$ par la formule $H(z,1) = z^d$. On a donc construit une homotopie entre l'application constante $S^1 \to S^1$ de valeur $f(0)$ et l'application $z \mapsto z^d$. La première de ces applications est de degré 0 alors que la seconde est de degré d. On en déduit donc que $d = 0$. □

Donnons deux autres applications de ce calcul.

Proposition 2.34. *Il n'existe pas d'application continue* $\log : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ *telle que* $\exp(\log(z)) = z$ *pour tout* $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Preuve. Supposons qu'une telle application existe, notons $u = \log(1)$. On peut considérer les morphismes de groupes suivants

$$\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, 1) \xrightarrow{\pi_1(\log)} \pi_1(\mathbb{C}, u) \xrightarrow{\pi_1(\exp)} \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, 1)$$

Leur composée doit être l'identité de $\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, 1)$. Par ailleurs le groupe $\pi_1(\mathbb{C}, u)$ est trivial ce qui est absurde. □

Proposition 2.35. *Soit* $n \geq 2$*, il n'existe pas d'application continue* $R_n : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} - \{0\}$ *telle que* $R_n(z)^n = z$.

Preuve. On suppose qu'une telle application existe, on note $u = R_n(1)$. On considère les morphismes de groupes suivants

$$\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, 1) \xrightarrow{\pi_1(R_n)} \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, u) \xrightarrow{\pi_1(z \mapsto z^n)} \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, 1)$$

Leurs composée doit être l'identité. D'un autre côté, il est facile de vérifier que le second morphisme a pour image le sous-groupe $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$. □

On peut également calculer les groupes d'homotopie supérieurs de S^1.

Proposition 2.36. *Pour* $d \geq 2$*, l'application* $p : \mathbb{R} \to S^1$ *a la propriété de relèvement unique par rapport à l'inclusion*

$$k : \partial I^d \to I^d$$

Preuve. La preuve est analogue à celle de la Proposition 2.28. □

Proposition 2.37. *Pour tout* $d \geq 2$*, on a* $\pi_d(S^1) \cong \{0\}$.

Preuve. L'application $p : (\mathbb{R}, 0) \to (S^1, 1)$ induit un morphisme

$$\pi_d(p) : \pi_d(\mathbb{R}) \to \pi_d(S^1)$$

On va montrer que ces morphismes sont surjectifs. Comme $\mathbb{R}$ est contractile, on a $\pi_d(\mathbb{R}) = \{0\}$ et cela nous donne bien le résultat voulu. Considérons donc une application $\alpha : S^d \to S^1$ qui envoie le point base de S^d sur 1. En utilisant l'homéomorphisme évident

$$S^d \cong I^d/\partial I^d$$

on peut voir α comme une application qu'on note encore α de I^d vers S^1 qui prend la valeur 1 sur le bord de I^d. Par la proposition précédente, on peut relever α en une application $\tilde{\alpha} : I^d \to \mathbb{R}$ prenant la valeur 0 sur le bord de I^d. Cela montre donc la surjectivité de $\pi_d(p)$. □

CHAPITRE 3

Théorie des revêtements

1. Généralités

Définition 3.1. Soit B un espace topologique. Un revêtement trivial de B est une paire (E, p) où E est un espace topologique, $p : E \to B$ est une application continue et telle qu'il existe un espace topologique discret S et un homéomorphisme $i : B \times S \to E$ tels que $p \circ i : B \times S \to B$ est la projection sur la première coordonnée.

Définition 3.2. Soit B un espace topologique. Un revêtement de B est la donnée d'une paire (E, p) telle que pour tout point b de B, il existe, un voisinage ouvert U de b tel que la paire $(p^{-1}(U), p_{|p^{-1}(U)})$ soit un revêtement trivial de $p^{-1}(U)$.

Proposition 3.3. *Soit (E, p) un revêtement d'un espace topologique B. Soit $C \subset B$ un sous-espace topologique de B. La paire $(p^{-1}(C), p_{|p^{-1}(C)})$ est un revêtement de C. On l'appelle restriction à C du revêtement (E, p) et on le note $(E_C, p_{|C})$.*

Preuve. En effet, soit c un point de C. Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert U de c dans B tel que (E_U, p) soit un revêtement trivial. On vérifie alors sans peine que $V = U \cap C$ est un voisinage ouvert de c dans U tel que (E_V, p) soit un revêtement trivial. □

Définition 3.4. Étant donné un revêtement (E, p) d'un espace topologique B, et b un point de B, on appelle fibre de (E, p) au-dessus de b l'ensemble $p^{-1}(b)$.Lorsque l'application p est évidente on note E_b la fibre au-dessus de b.

Exemple 3.5. Un revêtement trivial est un revêtement. Un exemple de revêtement non-trivial est donné par l'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$. La fibre en 1 de ce revêtement est en bijection avec l'ensemble des nombres entiers relatifs par l'application

$$n \mapsto 2n\pi i$$

De façon similaire. L'application $x \mapsto e^{2i\pi x}$ de $\mathbb{R}$ vers S^1 est un revêtement. C'est simplement la restriction du revêtement précédent à $S^1 \subset \mathbb{C} - \{0\}$.

Un autre exemple est donné par l'application $z \mapsto z^n$ de $\mathbb{C}-\{0\}$ dans lui-même. Par le théorème fondamental de l'algèbre, la fibre au-dessus de n'importe quel point est un ensemble à n éléments.

L'unique application $\varnothing \to B$ est un revêtement de B pour n'importe quel B.

On a aussi une notion de morphisme de revêtement.

Définition 3.6. Soit B un espace topologique. Soient (E, p) et (F, q) deux revêtements de B. Un morphisme de (E, p) vers (F, q) est une application continue $f : E \to F$ telle que $q \circ f = p$.

Clairement, la composée de deux morphismes de revêtements est encore un morphisme de revêtement de sorte qu'on peut poser la définition suivante

Définition 3.7. Soit B un espace topologique. On note $\mathbf{Rev}(B)$ la catégorie dont les objets sont les revêtements (E, p) de B et dont les morphismes sont les morphismes de revêtements.

Proposition 3.8. *Soit (E, p) un revêtement de B. Si B est connexe, alors on est dans une et une seule des deux situations suivantes*

(1) *L'espace E est vide.*
(2) *L'application p est surjective.*

Preuve. Rappellons que, par convention, un espace connexe est non-vide. On ne peut donc clairement pas être à la fois dans la situation (1) et (2). Notons U l'ensemble des points de E au-dessus desquels les fibres sont vides. Si x est dans U, alors, on peut trouver un voisinage ouverts de x dans B tel que la restriction du revêtement à ce voisinage soit triviale. Un revêtement trivial dont une des fibres est vide a nécéssairement toutes ses fibres vides. On en déduit que U contient le voisinage de x. Cela montre que U est un ouvert. Un raisonnement analogue montre que le complémentaire de U est ouvert. Comme B est connexe, on doit avoir $U = E$ ou $U = \varnothing$ qui correspondent respectivement au cas (1) et (2). ☐

On aura besoin de la propriété topologique suivante des revêtements.

Proposition 3.9. *Soit $p : E \to B$ un revêtement. Alors p est une application ouverte.*

Preuve. Soit U un ouvert non-vide de E et x un élément de U. Soit V un ouvert de B contenant $p(x)$ et au-dessus duquel le revêtement est trivial (un tel ouvert existe par définition d'un revêtement). On a un homéomorphisme $i : p^{-1}(V) \to V \times S$ pour un certain ensemble S. Soit $s \in S$ tel que $i(x) \in V \times \{s\}$. Notons V_s l'ouvert $i^{-1}(V \times \{s\})$ dans $p^{-1}(V)$. Par construction, p se restreint en un homéomorphisme $V_s \to V$. Soit $W_s = V_s \cap U$, alors $p(W_s)$ est un ouvert de V et donc de B. De plus $p(W_s)$ contient $p(x)$ et est contenu dans $p(U)$. On a donc montré que $p(U)$ contient un voisinage de $p(x)$. Comme ce raisonnement vaut pour tout x, $p(U)$ est un ouvert. ☐

Un théorème fondamental de la théorie des revêtements est le suivant.

Théorème 3.10. *Soit (E, p) un revêtement de B. Alors p a la propriété de relèvement unique par rapport à*

- *l'inclusion $i : \{0\} \subset I$,*
- *l'inclusion $j : \{0\} \times I \subset I^2$,*
- *l'inclusion $k : \partial I^d \subset I^d$ quand $d \geq 2$.*

Preuve. La preuve est exactement la même que la preuve des Propositions 2.28 et 2.36. ☐

2. Action du groupe fondamental de la base sur la fibre d'un revêtement

Soit $p : E \to B$ un revêtement, soit $b \in B$ un point. On va construire une action du groupe $\pi_1(B, b)$ sur la fibre E_b. Cette construction est complètement analogue à ce qu'on a fait dans le cas du cercle. Soit γ un lacet de B basé en b et soit x un point de E_b. Par le premier point du Théorème 3.10, on peut relever γ de manière unique en un chemin $\tilde{\gamma}$ de E avec $\tilde{\gamma}(0) = x$. Par ailleurs, le deuxième point de ce théorème assure que $\tilde{\gamma}(1) \in E_b$ ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixes de γ. On définit alors $\tilde{\gamma}(1)$ comme $[\gamma].x$. On vérifie alors que cela définit une action à gauche de $\pi_1(B, b)$ sur E_b.

Soit x un point de E dans la fibre E_b. On note $\mathrm{Stab}(x)$ le stabilisateur de x pour l'action construite ci-dessus.

Proposition 3.11. *Le morphisme $\pi_1(p) : \pi_1(E, x) \to \pi_1(B, b)$ est injectif d'image $\mathrm{Stab}(x)$.*

Preuve. Soit γ un lacet de E basé en x tel que $p \circ \gamma$ est homotope à extrémités fixes au chemin trivial. On peut donc construire une application $h : I^2 \to B$ telle que $h(0, -) = p \circ \gamma$, $h(1, t) = b$ et $h(t, 0) = h(t, 1) = b$. On peut également construire une application $H : \partial I^2 \to E$ telle que $H(0, -) = \gamma$, $H(1, t) = x$, $H(t, 0) = H(t, 1) = x$. Par le troisième point du Théorème 3.10, on peut étendre H de manière unique en une application $H : I^2 \to E$. Cette application H fournit une homotopie entre γ et c_x. On a donc bien montré l'injectivité de $\pi_1(p)$.

Par ailleurs, par unicité du relèvement des chemins, on constate qu'un lacet γ de B est de la forme $p \circ \tilde{\gamma}$ avec $\tilde{\gamma}$ un lacet basé en x si et seulement si l'unique relèvement de γ d'origine x aboutit en x. De façon équivalente, une lacet de B est de la forme $p \circ \gamma$ avec γ un chemin de E si et seulement si l'action de γ sur x est triviale. ☐

Proposition 3.12. *Soit $p : E \to B$ un revêtement avec E non-vide et connexe par arc. Alors pour tout point b de B l'action de $\pi_1(B, b)$ sur E_b est transitive.*

Preuve. Soient x et x' deux points de E_b, soit γ un chemin de E reliant x et x'. Alors, on vérifie que $p \circ \gamma$ est un lacet de B basé en b tel que $[p \circ \gamma].x = x'$. ☐

En utilisant ce résultat, on peut calculer le groupe fondamental de $\mathbb{RP}^n$.

PROPOSITION 3.13. *Le groupe fondamental de $\mathbb{RP}^1$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Pour $n \geq 2$, le groupe fondamental de $\mathbb{RP}^n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/(2)$.*

PREUVE. La première assertion découle du fait que $\mathbb{RP}^1$ est homéomorphe à S^1. Pour prouver la seconde, on remarque qu'on dispose d'un revêtement $p : S^n \to \mathbb{RP}^n$ donné par la formule

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : \dots : x_n]$$

Choisissons x un point de $\mathbb{RP}^n$. En utilisant les deux propositions ci-dessus, on constate que $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x)$ agit transitivement sur la fibre de p au-dessus de x et que le stabilisateur de n'importe quel point de cette fibre est trivial (en effet $\pi_1(S^n)$ est le groupe trivial). Puisque la fibre est un ensemble à deux éléments, on en déduit que $\pi_1(\mathbb{RP}^n, x) \cong \mathbb{Z}/(2)$. $\square$

On peut aussi comprendre les groupes d'homotopie supérieurs d'un revêtement.

PROPOSITION 3.14. *Soit x un point de E dans la fibre E_b. Soit $d \geq 2$, le morphisme*

$$\pi_d(p) : \pi_d(E, x) \to \pi_d(B, b)$$

est un isomorphisme.

PREUVE. L'injectivité se montre exactement comme dans la Proposition 3.11.

Soit $\gamma : (S^d, \omega) \to (B, b)$ une application continue pointée. Comme dans la Proposition 2.37, on peut voir γ comme une application $I^d \to B$ qui envoie le bord de I^d sur b. Par le troisième point du Théorème 3.10, on peut relever γ en une application $\tilde{\gamma}$ telle que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et $\tilde{\gamma} = x$ sur le bord de I^d. Cela montre la surjectivité de $\pi_d(p)$. $\square$

3. Groupoïde fondamental

DÉFINITION 3.15. Un groupoïde est une petite catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles.

DÉFINITION 3.16. Soit C un groupoïde. On dit que deux objets x et y de C sont connectés s'il existe un morphisme $f : x \to y$.

PROPOSITION 3.17. *Soit C un groupoïde. La relation "être connectés" est une relation d'equivalence sur les objets de C.*

PREUVE. La réflexivité vient du fait qu'on dispose toujours du morphisme identité $\mathrm{id}_x : x \to x$. La symétrie vient du fait que si $f : x \to y$ est un morphisme, alors, on a $f^{-1} : y \to x$. La transitivité vient de la composition des morphismes. $\square$

DÉFINITION 3.18. Soit C un groupoïde. L'ensemble des composantes connexes de C noté $\pi_0(C)$ est l'ensemble des objets de C quotienté par la relation d'équvalence de la proposition précédente. On dit qu'un groupoïde est connexe si l'ensemble de ses composantes connexes est réduit à un point.

DÉFINITION 3.19. Soit X, un espace topologique. On construit un groupoïde $\pi_{\leq 1}X$ appellé groupoïde fondamental de X. Ses objets sont les points de X. Étant donnés deux points x et x' de X, l'ensemble des homomorphismes de x vers x' est l'ensemble des chemins de x vers x' quotienté par le relation d'homotopie à extrémités fixes.

Comme la notation le suggère, le groupïde $\pi_{\leq 1}(X)$ contient à la fois la donnée de $\pi_0(X)$ et de $\pi_1(X, x)$ pour tout point base x de X. En effet, on vérifie facilement que $\pi_0(X) = \pi_0(\pi_{\leq 1}X)$ et $\pi_1(X, x) = \mathrm{Hom}_{\pi_{\leq 1}(X)}(x, x)$.

CONSTRUCTION 3.20. Soit $p : E \to B$ un revêtement, soit γ un chemin de B avec $\gamma(0) = b$, $\gamma(1) = b'$. Par le théorème 3.10, pour chaque élément x de E_b, il existe un unique chemin $\tilde{\gamma}$ de E prenant la valeur x en 0. L'élément $\tilde{\gamma}(1)$ est appelé le transport de x le long de γ. En utilisant le deuxième point du Théorème 3.10, on montre que le transport de x le long de γ ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixes de γ. On note $M(p)$ l'application

$$M(p) : \mathrm{Hom}_{\pi_{\leq 1}(B)}(b, b') \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(E_b, E'_b)$$

qui envoie une classe d'homotopie de chemin de b à b' sur l'application de transport le long de ce chemin. On peut faire de $M(p)$ un foncteur de $\pi_{\leq 1}(B)$ vers **Ens** en posant $M(p)(b) = E_b$. La proposition suivante vérifie que cette construction produit bien un foncteur.

Proposition 3.21. *Soit $p : E \to B$ un revêtement. Soit $\gamma : b \to b'$ et $\gamma' : b' \to b''$ deux chemins de B. Soit x un point de E_b. Alors*

$$M(p)(\gamma' * \gamma)(x) = M(p)(\gamma')(M(p)(\gamma)(x))$$

Preuve. Soit $\tilde{\gamma}$ l'unique relèvement de γ à E qui part de x et $\tilde{\gamma}'$ l'unique relèvement de γ' à E qui part de $\tilde{\gamma}(1)$. Le membre de droite est par définition $\tilde{\gamma}'(1)$. D'un autre côté, la concaténation $\tilde{\gamma}' * \tilde{\gamma}$ est un chemin de E qui relève $\gamma' * \gamma$ et qui part de x. Le membre de gauche de l'équation est donc donné par $\tilde{\gamma}' * \tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$. □

On a ainsi définit pour chaque revêtement $p : E \to B$ un foncteur $M(p) : \pi_{\leq 1}(B) \to$ **Ens**. Si $u : (E, p) \to (E', p')$ est un morphisme de revêtement, on peut construire $M(u)$ une transformation naturelle de $M(p)$ vers $M(p')$. Pour ce faire, il s'agit de donner pour chaque point b de B une application ensembliste $M(u)(b) : E_b \to E'_b$. Il suffit de prendre $M(u)(b) = u_{|E_b}$. Il faut vérifier que cette définition est bien une transformation naturelle . Il faut donc s'assurer que pour γ un chemin de b_0 à b_1 le diagramme

$$\begin{tikzcd} E_{b_0} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "M(p)(\gamma)"'] & E'_{b_0} \arrow[d, "M(p')(\gamma)"] \\ E_{b_1} \arrow[r, "u"'] & E'_{b_1} \end{tikzcd}$$

commute. Cela vient simplement du fait que si $\tilde{\gamma} : I \to E$ est le relèvement de γ prenant la valeur x en 0, alors $u \circ \tilde{\gamma} : i \to E'$ est le relèvement de γ prenant la valeur $u(x)$ en 0.

Ainsi, on a construit ainsi un foncteur

$$M : \mathbf{Rev}(B) \to \mathbf{Fon}(\pi_{\leq 1}(B), \mathbf{Ens})$$

L'existence de ce foncteur a une conséquence très importante.

Proposition 3.22. *Soit $p : E \to B$ un revêtement avec B connexe par arcs. Alors, il existe une bijection entre deux quelconques des fibres de p.*

Preuve. Soit b et b' deux points de B, soit γ un chemin de b à b'. Alors le transport le long de γ fournit une bijection entre E_b et $E_{b'}$. □

On utilise souvent la terminologie suivante.

Définition 3.23. Soit n un entier positif. Un revêtement à n feuillets est un revêtement dont toutes les fibres sont de cardinal n.

Par la proposition précédente, lorsque la base est connexe par arcs, un revêtement à n feuillets est simplement un revêtement dont une des fibres est de cardinal n.

4. Revêtement des espaces simplement connexes

Définition 3.24. Soit P une propriété des espaces topologiques. Un espace topologique X est dit localement P si pour tout point x de X et ouvert U contenant x, il existe un ouvert V possédant la propriété P contenant x et contenu dans U.

On s'intéressera principalement à la propriété d'être localement connexe par arcs et localement simplement connexe. Donnons d'abord la définition de cette dernière propriété.

Définition 3.25. Un espace topologique est dit être simplement connexe s'il est connexe par arcs et son groupe fondamental est trivial.

Exemple 3.26. L'espace topologique $\mathbb{R}^n$ est localement simplement connexe car si $x \in U$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on peut toujours trouver une boule ouverte contenant x et contenue dans U. On peut également vérifier que toute variété topologique est localement simplement connexe.

PROPOSITION 3.27. *Soit B un espace localement P et (E,p) un revêtement de base B, alors E est également localement P.*

PREUVE. En fait cette proposition est vraie plus généralement si p est un homéomorphisme local (exercice : montrer qu'un revêtement est un homéomorphisme local). Soit x un point de E et U un ouvert contenant x. Par hypothèse il existe un ouvert de E contenant x et contenu dans U sur lequel p est un homéomorphisme. On peut trouver un ouvert V de B contenant x et contenu dans $p(U)$ ayant la propriété P. Son image inverse par $p_{|U}$ est donc un ouvert de E contenant x et contenu dans U ayant la propriété P. □

PROPOSITION 3.28. *Soit $p:(E,x)\to(B,b)$ un revêtement entre espaces pointés et soit $f:(A,a)\to(B,b)$ une application continue. On suppose que A et B sont localement connexes par arcs et que A est connexe par arcs. Alors, l'application $f:A\to B$ admet un relèvement $g:A\to E$ qui envoie a sur x si et seulement si l'image de $\pi_1(f)$ est contenue dans l'image de $\pi_1(p)$.*

PREUVE. Si un tel g existe, on a $\pi_1(p)\circ\pi_1(g)=\pi(f)$ ce qui implique que l'image de $\pi_1(f)$ est contenue dans l'image de $\pi_1(p)$.

Réciproquement, si l'image de $\pi_1(f)$ est contenue dans l'image de $\pi_1(p)$. On peut construire g de la façon suivante. Pour a' dans A, on choisit n'importe quel chemin γ reliant a à a'. Le chemin $f\circ\gamma$ peut alors se relever de manière unique en un chemin $\tilde{\gamma}$ de E avec $\tilde{\gamma}(0)=x$, On définit alors $g(a')=\tilde{\gamma}'(1)$. On constate que si γ et γ' sont deux chemins reliant a à a', le chemin $(\gamma')^{-1}*\gamma$ est un lacet basé en a et donc le chemin $(f\circ\gamma')^{-1}*f\circ\gamma$ est un lacet de B qui est dans l'image de $\pi_1(p)$; on en déduit par la Proposition 3.11 que les deux valeurs de $g(a)$ obtenue à partir de γ et γ' coincident et donc que l'application g est bien définie.

Vérifions que g est continue. Soit a' un point de A. On choisit un ouvert U de B contenant $f(a')$, connexe par arcs et au-dessus duquel le revêtement p est trivial. Il existe donc un ouvert V de E homéomorphe à U et tel que $g(a')$ soit contenu dans V. On constate alors que dans le voisinage $W=f^{-1}(U)$, l'application g est donnée par la composée de l'application f avec l'homéomorphisme entre U et V. L'application f est donc continue au voisinage de a'. Comme ce raisonnement vaut pour tout a', elle est continue sur A tout entier. □

On va déduire de ce résultat que les espaces simplements connexes n'ont pas de revêtements non-triviaux ce qui est un cas particulier très important du théorème de classification. On commence par un résultat de topologie.

PROPOSITION 3.29. *Soit X un espace localement connexe par arcs, alors X est homémorphe à l'union disjointe de ses composantes connexes par arcs.*

PREUVE. On vérifie facilement que les composantes connexes par arcs sont des ouverts de X. On a une bijection ensembliste

$$f:X\to\bigsqcup_i U_i$$

où les ouverts U_i sont les composantes connexes par arcs de X. Par définition de la topologie d'une union disjointe, on vérifie immédiatement que f est continues et est une application ouverte, c'est donc un homéomorphisme. □

PROPOSITION 3.30. *Soit B un espace simplement connexe et localement connexe par arcs. Soit $p:E\to B$ un revêtement. Alors p est trivial.*

PREUVE. Soit b un point de B. Soit $S=E_b$ la fibre au-dessus de b. On peut appliquer la Proposition 3.28 avec $f=\mathrm{id}_B$. On en déduit pour chaque s de S une application continue $g_s:B\to E$ qui envoie b sur s. On peut donc assembler toutes les applications g_s en une unique application continue

$$g:\sqcup_{s\in S}B\to E$$

L'application g est ouverte puisque chacune des application g_s est ouverte. Il faut donc simplement vérifier que g est une bijection pour conclure la preuve. Soit x un point de E, on peut trouver un chemin reliant $p(x)$ à b. Le transport de x le long de ce chemin est un point de la fibre E_b. On en déduit que x est dans la composante connexe par arcs d'un certain $s\in S$. Il est alors facile de vérifier que $g_s(p(x))=x$ et donc que x est dans l'image de g donc g est surjective.

Soient x_1 et x_2 deux points de $\sqcup_{s\in S}B \cong B \times S$ tels que $g(x_1) = g(x_2)$. On note s_1 et s_2 les élément de S tels que x_1 vive dans le facteur d'indice s_1 et x_2 vive dans le facteur d'indice s_2. Par construction de g, on observe que $g(x_1)$ est dans la même composante connexe par arc que s_1 et $g(x_2)$ est dans la même composante connexe par arc que s_2. Cela implique que s_1 et s_2 sont dans la même composante connexe par arcs. Soient γ un chemin les reliant, alors le transport de s_1 le long de $p \circ \gamma$ est s_2. Puisque le groupe fondamental de B est trivial, on a nécéssairement $s_1 = s_2$. Par ailleurs, l'équation $p \circ g_{s_1} = \mathrm{id}$ implique immédiatement que $x_1 = x_2$. Donc g est injective. $\square$

5. Revêtements et groupoïde fondamental

Le but de cette section sera de donner un théorème de classification des revêtements d'un espace topologique B en terme du groupoïde fondamental de B. Pour formaliser, précisément ce résultat, nous aurons besoin du concept d'équivalence de catégories.

Définition 3.31. Soient C et D deux catégorie. Un foncteur $f : C \to D$ est une équivalence de catégories s'il existe un foncteur $g : D \to C$ tel que $g \circ f$ est naturellement isomorphe à id_C et $f \circ g$ est naturellement isomorphe à l'identité de D.

Remarque 3.32. On appelle g l'inverse de f mais il faut prendre garde au fait que f ne détermine pas g uniquement. Un même foncteur peut avoir plusieurs inverses. Cependant tous les inverses sont naturellement isomorphes.

Exemple 3.33. Soit $\mathbf{FVect}_K$ la catégorie des espaces vectoriels de dimension finies sur un corps K, alors le foncteur $D : \mathbf{FVect}_K \to \mathbf{FVect}_K^{\mathrm{op}}$ qui envoie V sur $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ est une équivalence de catégories. En effet, on peut considérer le foncteur $D^{\mathrm{op}} : \mathbf{FVect}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{FVect}$ qui envoie aussi V sur V^*. On a bien un isomorphisme naturel d'un espace de dimension finie sur son bidual

$$V \to (V^*)^*$$

Il est bon de noter que le foncteur de dualité n'est pas un isomorphisme de catégorie puisque l'isomorphisme $V \cong (V^*)^*$ n'est pas une égalité.

Proposition 3.34. *Soit B un espace topologique localement simplement connexe. Soit $p : E \to B$ un revêtement. Alors une base de la topologie de E est donnée par les sous-ensembles V de E tels que les conditions suivantes sont vérifiées.*

(1) *L'application p induit une bijection $V \to p(V)$.*
(2) *L'ensemble $p(V)$ est un ouvert simplement connexe.*
(3) *Pour tout points x et x' de V, pour tout chemin γ de $p(V)$ reliant $p(x)$ à $p(x')$, le transport le long de γ envoie x sur x'.*

Preuve. Soit x un point de E et U un ouvert de E contenant x. Alors $p(U)$ est un ouvert de B contenant $p(x)$. Puisque B est localement simplement connexe, on peut trouver un ouvert W simplement connexe contenant $p(x)$ et contenu dans $p(U)$. On sait que $p^{-1}(W)$ est homéomorphe à $W \times S$ pour un ensemble S, on note W_s la composante connexe par arcs de $W \times S$ contenant x. On note W'_s l'intersection $U \cap W_s$. Notons que x est contenu dans W'_s. L'application p induit un homéomorphisme $W'_s \to W' = p(W'_s)$. On peut alors trouver un ouvert W'' simplement connexe contenu dans W' et contenant $p(x)$. On pose alors $V = W'_s \cap p^{-1}(W'')$. On vérifie alors immédiatement que V satisfait les 3 conditions de la proposition. $\square$

Nous sommes maintenant prêt à montrer le théorème principal. On commence par construire un inverse au foncteur M.

Construction 3.35. On construit un foncteur

$$R : \mathbf{Fon}(\pi_{\leq 1}(B), \mathbf{Ens}) \to \mathbf{Rev}(B)$$

Pour F un foncteur $\pi_{\leq 1}(B) \to \mathbf{Ens}$, l'ensemble sous-jacent à $R(F)$ est l'union disjointe $\bigsqcup_{b\in B} F(b)$. La projection $p : R(F) \to B$ envoie un élément de $F(b)$ sur b. Enfin la topologie sur l'espace $R(F)$ a pour base les ensembles U satisfaisant les propriétés suivantes.

(1) La restriction de p à U est une bijection.

(2) L'espace $p(U)$ est un ouvert simplement connexe.
(3) Si $s \in F(b)$ et $t \in F(b')$ avec $b \neq b'$ sont deux points de U, alors $F(\gamma)(s) = t$ pour γ n'importe quel chemin de $p(U)$ reliant b à b'.

Il reste alors à vérifier la proposition suivante

PROPOSITION 3.36. *Soit B un espace topologique localement simplement connexe. Alors l'application $p : R(F) \to B$ est un revêtement.*

PREUVE. Il faut déjà vérifier que p est une application continue. Comme une base de la topologie de B est donnée par les ouverts simplement connexes, il suffit de vérifier que, pour U un ouvert simplement connexe, l'ensemble $p^{-1}(U)$ est un ouvert. Choisissons b dans U, alors, on observe que $p^{-1}(U)$ peut s'écrire comme l'union $\sqcup_{s\in F(b)} V_s$ où V_s est l'ensemble des éléments x de $p^{-1}(U)$ tels que $F(\gamma)(s) = x$ pour un chemin γ contenu dans U d'origine b. Chacun des ensembles V_s est un ouvert de $R(F)$ car ils satisfait les 3 conditions de la Construction 3.35. Leur réunion est donc aussi un ouvert.

Pour montrer que p est un revêtement, il suffit donc de montrer que p induit un homéomorphisme $V_s \to U$ pour chacun des ouverts V_s du paragraphe précédent. On sait par le paragraphe précédent que $p : V_s \to U$ est une bijection continue. Il suffit donc de montrer que $p : V_s \to U$ est une application ouverte. En fait on va montrer que $p : V \to p(V)$ est une application ouverte pour tout ouvert de $R(F)$ satisfaisant les 3 conditions de la Construction 3.35.

On commence par observer que les sous-ensembles de V dont l'image par p est un ouvert simplement connexe de B sont des ouverts de $R(F)$ car ils satisfont les 3 conditions de la Construction 3.35. Ce sont donc des ouverts de V. Par ailleurs, tout ouvert de V peut s'écrire comme une union de tels ouverts par définition de la topologie de $R(F)$. Ainsi, pour montrer que p est ouverte il suffit de constater que p envoie ces ouverts sur des ouverts de $p(V)$. □

DÉFINITION 3.37. Soit C une petite catégorie. On dit qu'un ensemble S de morphismes de C engendre C si tout morphisme de C peut s'écrire comme une composition d'éléments de S.

LEMME 3.38. *Soit C une petite catégorie et S un ensemble engendrant C. Soient F et G deux foncteurs de C vers D. On se donne aussi des morphismes $N(c) : F(c) \to G(c)$ pour tout objet c de C tels que pour tout $s : c \to c'$ un élément de S, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} F(c) \arrow[r, "N(c)"] \arrow[d, "F(s)"'] & G(c) \arrow[d, "G(s)"] \\ F(c') \arrow[r, "N(c')"'] & G(c') \end{tikzcd}$$

commute. Alors N est une transformation naturelle $F \to G$.

PROPOSITION 3.39. *Soit B un espace localement simplement connexe. On dit qu'un chemin de B est court s'il est homotope à un chemin entièremement contenu dans un ouvert simplement connexe de B. Alors l'ensemble des chemins courts engendre le groupoïde fondamental $\pi_{\leq 1}B$.*

PREUVE. Soient b et b' deux points de B et γ un chemin de B reliant b à b'. Par hypothèse, il existe un recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ de B par des ouverts U_i simplement connexes. Par le Lemme 2.27 on peut trouver une décomposition finie de l'intervalle $[0, 1]$ en sous-intervalles telle que γ envoie chacun des sous-intervalles dans l'un des ouverts U_i. On a donc bien écrit notre chemin comme composée de chemins courts. □

THÉORÈME 3.40. *Soit B un espace topologique localement simplement connexe. Alors, le foncteur M : $\mathbf{Rev}(B) \to \mathbf{Fon}(\pi_{\leq 1}(X), \mathbf{Ens})$ est une équivalence de catégories d'inverse R.*

PREUVE. On va construire un isomorphisme $k : RM(E) \to E$ naturel en E. Au niveau des ensembles sous-jacents, on a $RM(E) = \sqcup_b E_b$ qui est en bijection avec E de façon évidente. On note k cette bijection. Il est également évident que cette bijection rend le triangle ci-dessous commutatif

$$\begin{tikzcd} RM(E) \arrow[rr, "k"] \arrow[dr] & & E \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Il suffit donc de montrer que k est un homéomorphisme. Pour ce faire, il suffit de montrer que les ouverts de $RM(E)$ coïncident avec les ouverts de E. Mais on connaît une base d'ouvert des topologies de E et de $RM(E)$. En utilisant 3.34, on constate que ces deux bases coïncident.

On souhaite maintenant construire un isomorphisme naturel $MR(F) \to F$ pour tout F dans la catégorie $\mathbf{Fon}(\pi_{\leq 1}(B), \mathbf{Ens})$. Pour chaque b dans B, on dispose d'une bijection évidente $MR(F)(b) \cong F(b)$. Pour montrer que cela définit bien une bijection de $MR(F)$ à F on peut se restreindre à le vérifier pour les chemins courts par le Lemme 3.38 et la Proposition 3.39. Pour γ un chemin court de B reliant b à b', il est facile de vérifier en contemplant la définition que $MR(F)(\gamma) : F(b) \to F(b')$ coïncide avec $F(\gamma)$. $\square$

6. Revêtements et groupe fondamental

Le problème de la section précédente est que la catégorie des foncteurs $\pi_{\leq 1}(B) \to \mathbf{Ens}$ est une catégorie qui semble très compliquée. Le but de cette section sera de montrer qu'elle est équivalente à une catégorie beaucoup plus concrète. On commence par introduire une notation. Pour $f : C \to D$ un foncteur entre petites catégories, on note f^* le foncteur

$$f^* : \mathbf{Fon}(D, \mathbf{Ens}) \to \mathbf{Fon}(C, \mathbf{Ens})$$

qui envoie $F : D \to \mathbf{Ens}$ sur $F \circ f$.

Si on choisit un point b de B, on dispose d'une inclusion de groupoïdes

$$i : \mathcal{B}\pi_1(B, b) \to \pi_{\leq 1}(B)$$

On peut donc construire le foncteur

$$i^* : \mathbf{Fon}(\pi_{\leq 1}(B), \mathbf{Ens}) \to \mathbf{Fon}(\mathcal{B}\pi_1(B, b), \mathbf{Ens})$$

Par ailleurs rappellons que la catégorie $\mathbf{Fon}(\mathcal{B}\pi_1(B, b), \mathbf{Ens})$ n'est autre que la catégorie des $\pi_1(B, b)$-ensembles (c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les ensembles munis d'une action de $\pi_1(B, b)$ et dont les morphismes sont les applications qui préservent l'action). On note cette catégorie $\mathbf{Ens}^{\pi_1(B,b)}$.

On a alors le résultat suivant.

Théorème 3.41. *Soit B un espace topologique connexe et localement simplement connexe. Soit b n'importe quel point de B. Alors $i^* \circ M$ est une équivalence de catégories*

$$\mathbf{Rev}(B) \to \mathbf{Ens}^{\pi_1(B,b)}$$

On montrera ce résultat à la fin de cette section, après quelques préliminaires catégoriques.

Proposition 3.42. *S'il existe un isomorphisme naturel $f \cong g$ entre deux foncteurs $C \to D$, alors les deux foncteurs f^* et g^* sont naturellement isomorphes.*

Preuve. Soit $T : f \to g$ l'isomorphisme naturel. Pour tout c in C, on a un donc un isomorphisme

$$T(c) : f(c) \to g(c)$$

Soit $F : D \to \mathbf{Ens}$. On construit un isomorphisme

$$\tilde{T}(F) : f^*F \to g^*F$$

sur un objet c cet isomorphisme est donné par

$$F(f(c)) \xrightarrow{F(T(c))} F(g(c))$$

Puisque T est une transformation naturelle, un morphisme $u : c \to c'$ nous donne un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} f(c) \arrow[r, "T(c)"] \arrow[d, "f(u)"'] & g(c) \arrow[d, "g(u)"] \\ f(c') \arrow[r, "T(c')"'] & g(c') \end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur F à ce diagramme, on trouve un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} f^*F(c) \arrow[r, "\tilde{T}(F)(c)"] \arrow[d, "f^*F(u)"'] & g^*F(c) \arrow[d, "g^*F(u)"] \\ f^*F(c') \arrow[r, "\tilde{T}(F)(c')"'] & g^*F(c') \end{tikzcd}$$

qui montre que $\tilde{T}(F)$ est bien une transformation naturelle entre $f^*(F)$ et $g^*(F)$.

D'un autre côté, étant donné une transformation naturelle $h : F \to G$, on peut considérer le carré

$$\begin{tikzcd} f^*F \arrow[r, "\tilde{T}(F)"] \arrow[d, "f^*h"'] & g^*F \arrow[d, "g^*h"] \\ f^*G \arrow[r, "\tilde{T}(G)"'] & g^*G \end{tikzcd}$$

Pour vérifier qu'il est commutatif, il suffit de vérifier qu'il l'est lorsqu'on évalue sur chaque objet de C. En d'autres termes, on doit vérifier que pour tout $c \in C$, le carré

$$\begin{tikzcd} F(f(c)) \arrow[r, "F(T(c))"] \arrow[d, "h(f(c))"'] & F(g(c)) \arrow[d, "h(g(c))"] \\ G(f(c)) \arrow[r, "G(T(c))"'] & G(g(c)) \end{tikzcd}$$

est commutatif. Cela découle simplement du fait que h est une transformation naturelle. On a donc bien construit une transformation naturelle $\tilde{T} : f^* \to g^*$.

Il reste à montrer que $\tilde{T}$ est un isomorphisme naturel. Par définition T est un isomorphisme naturel, il existe donc $S : g \to f$ un isomorphisme réciproque. En utilisant la même construction que ci-dessus, on peut donc construire une transformation naturelle $\tilde{S} : g^* \to f^*$. On peut alors vérifier que $\tilde{S} \circ \tilde{T} = \mathrm{id}$. En efft, il suffit de le vérifier sur chaque objet F de $\mathbf{Fon}(D, \mathbf{Ens})$, on doit donc vérifier que

$$\tilde{S}(\tilde{T}(F)) : f^*F \to f^*F$$

est l'identité. Encore, il est uffisant de montrer que pour chaque objet de c, l'application

$$\tilde{S}(\tilde{T}(F))(c) : F(f(c)) \to F(f(c))$$

est égale à l'identité. C'est une vérification immédiate par définition de $\tilde{S}$ et $\tilde{F}$.

On montre de même que $\tilde{T} \circ \tilde{S} = \mathrm{id}$. On a donc bien construit un isomorphisme naturel entre les foncteurs f^* et g^*. □

Corollaire 3.43. *Soit $f : C \to D$ une équivalence de catégories, alors le foncteur*

$$f^* : \mathbf{Fon}(D, \mathbf{Ens}) \to \mathbf{Fon}(C, \mathbf{Ens})$$

est une équivalence de catégories.

PREUVE. En effet, par définition, il existe $g : D \to C$ tel que $f \circ g$ est naturellement isomorphe à l'identité de D et $g \circ f$ est naturellement isomorphe à l'identité de C. Par ailleurs, il est immédiat que $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$ et $g^* \circ f^* = (f \circ g)^*$. On peut donc déduire de la proposition précédente que f^* est une équivalence de catégorie d'inverse g^*. $\square$

PROPOSITION 3.44. *Soit C un groupoïde connexe. Alors, pour tout objet x de C l'inclusion*

$$i : \mathcal{B}\operatorname{Hom}_C(x, x) \to C$$

est une équivalence de catégories.

PREUVE. Rappellons qu'un groupoïde C est connexe si pour tout x et y des objets de C, il existe un morphisme de C de x à y.

Notons $G = \operatorname{Hom}_C(x, x)$. Choisissons pour chaque objet y de C un élément a_y dans $\operatorname{Hom}_C(x, y)$ en prenant $a_x = \mathrm{id}_x$. On construit un foncteur $r : C \to \mathcal{B}G$ qui envoie tous les objets de C sur l'unique objet de $\mathcal{B}G$ et qui envoie un morphisme $u : y \to z$ sur $a_z^{-1} \circ u \circ a_y \in G$. Si $u : y \to z$ et $v : z \to t$ sont deux morphismes composables de C, on a bien

$$r(v \circ u) = a_t^{-1} \circ v \circ a_z \circ a_z^{-1} \circ u \circ a_y = r(v) \circ r(u)$$

de qui montre que r est un foncteur. Maintenant, on vérifie que $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathcal{B}G}$. D'autre part, on a une transformation naturelle

$$T : i \circ r \to \mathrm{id}_C$$

donnée par $T(y) = a_y : x = i \circ r(y) \to y$. $\square$

Nous pouvons maintenant prouver le Théorème 3.41.

PREUVE. Remarquons qu'en vertu du Théorème 3.40, il suffit de montrer que i^* est une équivalence de catégorie. Par le Corollaire 3.43, il suffit de montrer que i est une équivalence de catégories. Comme B est localement simplement connexe et connexe, il est connexe par arcs. On en déduit que $\pi_{\leq 1}(B)$ est un groupoïde connexe. Par la Proposition 3.44 on sait donc que i est une équivalence de catégorie. $\square$

7. Quelques compléments sur les revêtements

Dans cette section, on va exploiter l'équivalence de catégorie du paragraphe précédent pour affiner notre compréhension des revêtements. Dans toute cette section B est un espace topologique connexe par arcs et localement simplement connexe. On fixe un point b de B et on note $G = \pi_1(B, b)$. On note M au lieu de $i^* \circ M$ l'équivalence de catégorie

$$M : \mathbf{Rev}(B) \to \mathbf{Ens}^G$$

PROPOSITION 3.45. *Soit un revêtement $p : E \to B$. Alors E est connexe par arcs si et seulement si $M(p)$ est un G-ensemble transitif.*

PREUVE. Supposons E est connexe par arcs. Soient x et y deux points de la fibre E_b. Soit γ un chemin reliant x à y. Alors le tranport le long de $p \circ \gamma$ envoie x sur y, ce qui montre la transitivité.

Réciproquement, supposons $M(p)$ transitif. Cela implique que deux points quelconques de la fibre E_b sont reliés par un chemin. Pour montrer que E est connexe par arcs, il suffit donc de montrer que tout point de E est relié par un chemin à un points de E_b. Soit donc x un point quelconque de E, soit γ un chemin de B reliant $p(x)$ à b. Alors le transport le long de γ fournit un chemin reliant x à un point de E_b. $\square$

COROLLAIRE 3.46. *Les classes d'isomorphismes de revêtements connexes par arcs de B sont en bijection avec les classes de conjugaisons de sous-groupe de G.*

PREUVE. Cela découle du théorème de classification, de la proposition précente, et de l'observation que tout G-ensemble transitif est isomorphe à G/H muni de l'action à gauche de G pour H un sous-groupe de G. Par ailleurs G/H est isomorphe à G/H' en tant que G-ensemble si et seulement si H et H' sont conjugués. $\square$

DÉFINITION 3.47. Un revêtement de B est dit Galoisien si il est connexe par arcs et si le groupe auquel il correspond par le corollaire ci-dessus est un groupe distingué.

La terminologie Galoisien vient de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.48. *Soit $p : E \to B$ un revêtement Galoisien. Soit N le sous-groupe distingué de G auquel il correspond. Alors, le groupe des automorphismes de E dans la catégorie* $\mathbf{Rev}(B)$ *est isomorphe à G/N.*

PREUVE. Par le théorème de classification, ce groupe s'identifie au groupe des automorphismes de G/N vu comme un G-ensemble. Il est facile de s'assurer que tout automorphisme de G/N est déterminé par l'image de l'élément neutre de G/N est que cette image peut-être n'importe quel élément de G/N, on a donc une bijection ensembliste entre G/N et le groupe des automorphismes du G-ensemble G/N. Il est facile de se convaincre que cette bijection est compatible aux structures de groupes. □

DÉFINITION 3.49. On appelle revêtement universel de B le revêtement Galoisien correspondant au groupe trivial.

PROPOSITION 3.50. *Soit $p : E \to B$ le revêtement universel. Alors E est simplement connexe.*

PREUVE. On sait que E est connexe par arcs puisque le G-ensemble G est transitif. Par ailleurs, pour tout point x de la fibre E_b, en utilisan la Proposition 3.11, on sait que le morphisme

$$\pi_1(p) : \pi_1(E, x) \to \pi_1(B, b)$$

est injectif et que son image est le stabilisateur de x pour l'action de G. Ce stabilisateur est trivial puisque G agit librement sur lui-même. □

On a en fait la caractérisation suivante.

PROPOSITION 3.51. *Soit $p : E \to B$ un revêtement avec E simplement connexe. Alors p est isomorphe au revêtement universel.*

PREUVE. Exercice. □

8. Théorème de van Kampen

Dans cette section, on considère un espace topologique X connexe par arcs et localement simplement connexe. On suppose X recouvert par deux ouverts U et V avec U, V et $U \cap V$ connexes par arcs. On choisit un point base x dans $U \cap V$. Le théorème de van Kampen affirme que l'on peut connaître le groupe fondamental de X si l'on connaît les groupes fondamentaux de U de V et de $U \cap V$. L'énoncé précis est le suivant.

THÉORÈME 3.52. *Le carré commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U \cap V, x) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U, x) \arrow[d] \\
\pi_1(V, x) \arrow[r] & \pi_1(X, x)
\end{tikzcd}$$

induit par les inclusions est un carré cocartésien dans la catégorie des groupes.

En d'autres termes, le groupe $\pi_1(X, x)$ est la somme amalgamée des groupes $\pi_1(U, x)$ et $\pi_1(V, x)$ sur $\pi_1(U \cap V, x)$. La construction suivante donne une description un peu plus explicite de cette somme amalgamée.

CONSTRUCTION 3.53. Soit $G \xleftarrow{i} H \xrightarrow{j} K$ un diagramme dans la catégorie des groupes. La somme amalgamée de G et K sur H notée $G \star_H K$ est construite de la façon suivante.

L'ensemble sous-jacent est l'ensemble des mots finis non-vides sur l'alphabet $G \sqcup K$ quotienté par les relations locales suivantes

- Si on a un sous-mot de longueur 2 de la forme $g_1 g_2$ où g_1 et g_2 sont dans G, on peut le remplacer par le mot de longueur 1 donné par le produit de g_1 et g_2.
- Si on a un sous-mot de longueur 2 de la forme $k_1 k_2$ où k_1 et k_2 sont dans K, on peut le remplacer par le mot de longueur 1 donné par le produit de k_1 et k_2.
- On peut remplacer $i(h)$ par $j(h)$ pour tout h dans H.

Cet ensemble a une structure de groupe dont l'élément neutre est la classe du mot e_G avec e_G l'élément neutre de G (on remarque que ce mot est équivalent à e_K où e_K est l'élément neutre de K). La multiplication de ce groupe est donnée par la concaténation des mots.

Nous pouvons maintenant montrer le théorème de van Kampen.

Preuve du théorème de van Kampen. Par propriété universelle de la colimite, on dispose d'un morphisme

$$\alpha : \pi_1(U,x) \star_{\pi_1(U\cap V,x)} \pi_1(V,x) \to \pi_1(X,x)$$

Vérifions que ce morphisme est surjectif. Soit γ un lacet basé en x, par le Lemme 2.27, on peut écrire γ comme une composée $\gamma_r * \ldots * \gamma_1$ de chemins de X avec chaque γ_i entièrement contenu dans U ou dans V. On peut par ailleurs, quitte à composer certains des chemins γ_i, supposer que les chemins γ_i alternent entre U et V (c'est à dire que si γ_i est contenu dans U, γ_{i+1} est contenu dans V). Cela implique que les extrémités de chaque chemin γ_i sont contenues dans $U \cap V$. Choisissons pour chaque i, un chemin a_i reliant $\gamma_i(1) = \gamma_{i+1}(0)$ à x entièrement contenu dans $U \cap V$, alors, γ est homotope à la composée

$$\gamma_r * a_{r-1}^{-1} * a_{r-1} * \gamma_{r-1} * \ldots \gamma_2 * a_1^{-1} * a_1 * \gamma_1$$

qui est bien dans l'image du morphisme α.

Montrons à présent l'injectivité. On note P la source de α et G le but de α. Considérons l'ensemble P, on peut le voir comme un $\pi_1(U,x)$-ensemble par la formule

$$g.p := i(g)p$$

où $g \in \pi_1(U,x)$ et $i : \pi_1(U,x) \to P$ est l'inclusion évidente. On note $p : \tilde{U} \to U$ le revêtement associé par le théorème de classification. De même, on peut construire un revêtement $q : \tilde{V} \to V$. Par construction, les restrictions de ces deux revêtements à $U \cap V$ sont isomorphes. Il est donc possible de les recoller en un revêtement $r : E \to X$ avec $E_U \cong \tilde{U}$ et $E_V \cong \tilde{V}$. On peut alors construire une application ensembliste $\beta : G \to P$ en envoyant la classe d'un lacet γ de X sur $[\gamma].e$ (où e est l'élément neutre de P). Pour montrer que α est injective, il suffit de montrer que $\beta \circ \alpha$ est l'indentité sur tout élément de P. Par construction, tout élément de P est un mot $g_1 g_2 \ldots g_r$ où chaque élément g_i est où bien un élément de $\pi_1(U,x)$ ou bien un élément de $\pi_1(V,x)$. On va montrer que $\beta \circ \alpha(g_1 g_2 \ldots g_r) = g_1 \ldots g_r$ par récurrence sur la longueur r du mot. C'est évident si le mot est de longueur 1. Supposons avoir montré le résultat pour les mots de longueur $\leq r-1$. Soit $g_1 \ldots g_r$ un mot de longueur r. En utilisant le fait que α est un morphisme de groupes, on obtient

$$\beta \circ \alpha(g_1 \ldots g_r) = \beta(\alpha(g_1)\alpha(g_2 \ldots g_r)) = \alpha(g_1).(\alpha(g_2 \ldots g_r).e)$$

où le point désigne l'action de monodromie pour le revêtement E. Par l'hypothèse de récurrence, le membre de droite de cette équation est simplement $\alpha(g_1).(g_2 \ldots g_r)$. On doit donc calculer l'action de monodromie de g_1 sur l'élément $(g_2 \ldots g_r)$ de P. Puisque g_1 est représenté par un lacet entièrement contenu dans U ou dans V et qu'on connaît la restriction de E à ces deux ouverts, on a bien l'équation

$$\beta \circ \alpha(g_1 \ldots g_r) = g_1 \ldots g_r$$

□

CHAPITRE 4

Groupes d'homotopie supérieurs

1. Monoïdes et groupes

Soit C une catégorie. On suppose que C possède des produits finis. On note $*$ le produit vide dans C (c'est l'élément neutre pour le produit).

Définition 4.1. Un objet en monoïde dans C est un triplet (X, m, u) où X est objet de C, $m : X \times X \to X$ et $u : * \to X$ sont des morphismes tels que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} X \times X \times X \arrow[r, "m\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times m"'] & X \times X \arrow[d, "m"] \\ X \times X \arrow[r, "m"'] & X \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} X \times * \arrow[r] \arrow[dr] & X \times X \arrow[d] & * \times X \arrow[l] \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

commutent. Un objet en groupe est un quadruplet (X, m, u, i) tel que (X, m, u) est un objet en monoïde et $i : X \to X$ est un morphisme tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr] & X \times X \arrow[r, "\mathrm{id}\times i"] & X \times X \arrow[dd, "m"] \\ X \times X \arrow[d, "i\times\mathrm{id}"'] & * \arrow[dr, "u"'] & \\ X \times X \arrow[rr, "m"'] & & X \end{tikzcd}$$

commute. Dans ce diagramme, Δ désigne le morphisme diagonal.

Un monoïde (resp. groupe) dans C est dit être abélien si le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "m"'] & X \times X \arrow[d, "m"] \\ & X \end{tikzcd}$$

commute (où $\tau : X \times X \to X \times X$ désigne l'isomorphisme canonique qui permute les facteurs).

Exemple 4.2. Un monoïde (resp. groupe) dans la catégorie des ensembles est un monoïde (resp. groupe) au sens usuel. Un monoïde (resp. groupe) dans la catégorie des espaces topologiques est un monoïde (resp. groupe) topologique.

Proposition 4.3. *Soit (X, m, u) un monoïde dans la catégorie C, soit $F : C \to D$ un foncteur préservant les produits finis, alors $(F(X), F(m), F(u))$ est un monoïde dans la catégorie D. Le résultat analogue est également vrai pour les groupes.*

Preuve. Elémentaire. ☐

Corollaire 4.4. *Soit* (X, m, u) *un monoïde dans la catégorie* C *et* Y *n'importe quel objet dans* C*, alors* $\mathrm{Hom}_C(Y, X)$ *est un monoïde.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition précédente au foncteur $\mathrm{Hom}_C(Y, -)$. ☐

Définition 4.5. Un h-monoïde (resp. h-groupe) est un objet en monoïde (resp. groupe) dans la catégorie $\mathbf{hTop}_*$.

Exemple 4.6. Un groupe topologique peut-être considéré comme un h-groupe. Il suffit de remplacer les applications d'unité, multiplication et inverse par leur classe d'homotopie.

2. Structure de groupes abéliens sur les groupes d'homotopies supérieurs

Lemme 4.7 (Eckmann-Hilton). *Soit* M *un ensemble et* (M, m_1, u_1) *et* (M, m_2, u_2) *deux structures de monoïde sur* M*. Si* $u_1 = u_2$ *et* m_1 *et* m_2 *satisfont la relation d'interchange :*

$$m_1(m_2(a, b), m_2(c, d)) = m_2(m_1(a, c), m_1(b, d))$$

valide pour tous les éléments (a, b, c, d) *de* M*. Alors* $m_1 = m_2$ *et* (M, m_1, u_1) *est un monoïde abélien. Si par ailleurs il existe* i_1 *qui fait de* (M, m_1, u_1, i_1) *un groupe, alors c'est un groupe abélien.*

Preuve. On note $u = u_1 = u_2$. On considère la relation :

$$m_1(m_2(a, b), m_2(c, d)) = m_2(m_1(a, c), m_1(b, d))$$

Si on spécialise cette formule au cas b et c valent u, on trouve la formule

$$m_1(a, d) = m_2(a, d)$$

ce qui montre que les deux multiplications sont égales. On peut donc noter m au lieu de m_1 et m_2. Si on spécialise maintenant la formule au cas où $a = d = u$, on trouve

$$m(b, c) = m(c, b)$$

qui montre le caractère abélien de la multiplication. ☐

Soit X un espace topologique pointé. Soit $k \geq 2$ un nombre entier. On identifie $\pi_k(X, x)$ avec l'ensemble des classes d'homotopies préservant le bord d'applications continues $I^k \to X$ qui envoient le bord sur le point base.

Proposition 4.8. *L'ensemble* $\pi_k(X, x)$ *est naturellement muni d'une structure de groupe abélien.*

Preuve. Il s'agit d'une application du lemme d'Eckmann-Hilton. On va construire k structures de groupes sur $\pi_k(X, x)$ qui satisfont la propriété d'interchange. Pour γ et γ' deux appllications $I^k \to X$ qui envoient le bord de I^k sur x, on définit

$$\begin{aligned} m_1(\gamma, \gamma')(t_1, t_2, \ldots, t_k) &= \gamma(2t_1, t_2, \ldots, t_k) \text{ si } t_1 \leq 1/2 \\ &= \gamma'(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_k) \text{ si } t_1 \geq 1/2 \end{aligned}$$

On définit m_i de manière analogue mais en utilisant la coordonnée t_i. Chacune de ces opérations fait de $\pi_k(X)$ un groupe. Par ailleurs l'unité de chacune de ces opérations est la même. Enfin on vérifie que ces opérations satisfont la propriété d'interchange. On a même une égalité

$$m_i((m_j(\gamma_1, \gamma_2), m_j(\gamma_3, \gamma_4)) = m_j((m_i(\gamma_1, \gamma_3), m_i(\gamma_2, \gamma_4))$$

et pas simplement une homotopie. ☐

CHAPITRE 5

Algèbre homologique

1. Complexes de chaînes

DÉFINITION 5.1. Soit R un anneau commutatif. Un complexe de chaîne sur R est la donnée

- d'une famille $\{C_n\}_{n\geq 0}$ de R-modules indexée par les entiers naturels ,
- d'une familles de morphismes de R-modules $d_n : C_n \to C_{n-1},\ n \geq 1$, appellés différentielles pour tout $n \geq 1$,

telles que l'identité $d_n \circ d_{n+1} = 0$ soit vérifiée pour tout $n \geq 1$.

REMARQUE 5.2. On représente souvent un complexe par un diagramme de la forme suivante

$$C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} \dots \xleftarrow{d_n} C_n \xleftarrow{d_{n+1}} C_{n+1} \xleftarrow{d_{n+2}} C_{n+2} \xleftarrow{d_{n+3}} \dots$$

Pour simplifier les notations, on note souvent un indice indéfini par une astérisque. On écrit par exemple “soit (C_*, d_*) un complexe de chaîne” ou encore plus simplement “soit C un complexe de chaîne”. On peut peut aussi laisser tomber l'indice des applications d_n lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible.

DÉFINITION 5.3. Soit (C_*, d_*) un complexe de chaînes. On note $Z_n(C)$ le R-module $\ker(d_n)$ et $B_n(C)$ le R-module $\mathrm{im}(d_{n+1})$. Enfin on note $H_n(C)$ le quotient

$$H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$$

Cette formule a aussi du sens quand $n = 0$ en fixant par convention $Z_0(C) = C_0$. Les éléments de $Z_n(C)$ s'appellent les n-cycles, les éléments de $B_n(C)$ s'appellent les n-bords et le groupe $H_n(C)$ est appellé le n-ième groupe d'homologie de C.

REMARQUE 5.4. L'équation $d_n \circ d_{n+1} = 0$ montre que l'image de d_{n+1} est contenue dans le noyau de d_n et donc que le n-ième groupe d'homologie est bien défini.

Il existe une catégorie $\mathbf{Ch}_*(R)$ dont les objets sont les complexes de chaînes sur R et dans laquelle un morphisme de (C_*, d_*) vers (C'_*, d'_*) est la donnée d'une collection de morphismes de R-modules $f_n : C_n \to C'_n$ telle que les équations $f_n \circ d_{n+1} = d'_{n+1} \circ f_{n+1}$ soit satisfaites pour tout $n \geq 0$. Il est immédiat de vérifier que les groupes d'homologie $H_*(-)$ forment un foncteur de $\mathbf{Ch}_*(R)$ vers $\mathbf{grMod}_R$ où $\mathbf{grMod}_R$ est la catégorie des R-modules gradués (un R-module gradué est simplement une collection de R-modules indexée par les entiers naturels, un morphisme dans cette catégorie est ce qu'on imagine).

DÉFINITION 5.5. Soient (C_*, d_*) et (C'_*, d'_*) deux complexes de chaînes et f et g deux morphismes de complexe de chaînes de C vers C'. Une homotopie entre f et g est la donnée d'une suite d'application $h_n : C_n \to C'_{n+1}$ telle que les équations

$$d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = f_n - g_n$$

soient satisfaites pour tout n.

PROPOSITION 5.6. *Mêmes notations. On suppose qu'il existe une homotopie entre f et g, alors pour tout n, on a l'égalité*

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(C) \to H_n(C')$$

Preuve. Soit x un élément de C_n satisfaisant $d_n(x) = 0$. Soit $[x]$ la classe d'homologie de $[x]$. On a alors

$$\begin{aligned} H_n(f)([x]) &= [f_n(x)] \\ &= [g_n(x) + d'_{n+1} \circ h_n(x) + h_{n-1} \circ d_n(x)] \\ &= [g_n(x) + d'_{n+1} \circ h_n(x)] \\ &= [g_n(x)] \\ &= H_n(g)([x]) \end{aligned}$$

□

Proposition 5.7. *Soit k un corps. Soit C_* un complexe de chaîne sur k. Soit H_* l'homologie de C_* vue comme un complexe avec une différentielle nulle. Alors, il existe un morphisme $p_* : C_* \to H_*$ et un morphisme $i : H_* \to C_*$ tels que $p \circ i = \mathrm{id}$ et $i \circ p$ est homotope à l'identité.*

Preuve. Soit Z_n le sous-espace vectoriel des cycles et $B_n \subset Z_n$ l'espace des bords. On choisit un scindement de l'espace vectoriel C_n comme $Z_n \oplus R_n$. Puis un scindement de Z_n comme $B_n \oplus H_n$ (en effet un supplémentaire de B_n dans Z_n est canoniquement isomorphe au quotient $H_n = Z_n/B_n$). On définit alors i en degré n comme l'inclusion $H_n \to C_n$ et p comme la projection $C_n \to H_n$. On vérifie sans difficultés que p et i sont des morphismes de complexes et que $p \circ i = \mathrm{id}$. On construit maintenant une homotopie h entre $i \circ p$ et id. Pour cela, on observe que la différentielle se restreint en un isomorphisme $R_{n+1} \cong B_n$. On définit alors $h_n : B_n \to C_{n+1}$ comme la composée de l'inverse de la différentielle avec l'inclusion $R_{n+1} \to C_{n+1}$. On définit h_n par zéro sur H_n et R_n. On peut alors calculer l'application $d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n$. Sur B_n et R_n cette application est l'identité. Sur H_n, cette application est nulle. On a donc bien construit une homotopie h entre $i \circ p$ et l'identité. □

2. Modules simpliciaux et complexes de chaînes

Définition 5.8. La catégorie des R-modules simpliciaux est la catégorie des foncteurs $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Mod}_R$. On note cette catégorie $s\mathbf{Mod}_R$.

Rappellons que, étant donné $X_\bullet$ un R-module simplicial, on dispose de morphismes

$$d_i : X_n \to X_{n-1}$$

pour $0 \leq i \leq n$ appellées faces. Ces applications sont induites par les $n+1$ morphismes $f^i : [n-1] \to [n]$ avec f^i l'unique injection croissante dont l'image est $[n] - \{i\}$.

On construit un foncteur $C : s\mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Ch}_*(R)$. Les R-modules qui constituent $C(X_\bullet)$ sont donnés par

$$C_n(X_\bullet) = X_n$$

La différentielle

$$d : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

est donnée par la formule

$$d(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i(x)$$

Proposition 5.9. *La formule ci-dessus est bien une différentielle.*

Preuve. Soit $x \in X_n$, on a alors

$$\begin{aligned}
d(d(x)) &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+j}d_j(d_i(x)) \\
&= \sum_{0\leq j<i\leq n}(-1)^{i+j}d_j(d_i(x)) + \sum_{n-1\geq j\geq i\geq 0}(-1)^{i+j}d_j(d_i(x)) \\
&= \sum_{0\leq j<i\leq n}(-1)^{i+j}d_{i-1}(d_j(x)) + \sum_{n-1\geq j\geq i\geq 0}(-1)^{i+j}d_j(d_i(x)) \\
&= \sum_{0\leq j\leq i\leq n-1}(-1)^{i+j+1}d_i(d_j(x)) + \sum_{n-1\geq i\geq j\geq 0}(-1)^{i+j}d_i(d_j(x)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dans ce calcul, le passage de la deuxième ligne à la troisième est une application de la formule

$$d_j \circ d_i = d_{i-1} \circ d_j$$

qui est vraie dès que $j < i$. Le passage de la troisième ligne à la quatrième est un changement d'indice dans les deux sommes. □

3. Morphisme connectant

Soit

$$0 \to C_* \xrightarrow{i} D_* \xrightarrow{p} E_* \to 0$$

une suite exacte courte de complexes de chaînes sur R. Nous allons construire un homomorphisme appelé connectant

$$c_n : H_n(E) \to H_{n-1}(C)$$

Pour ce faire considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d] & D_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d] & E_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"'] & D_{n-1} \arrow[r, "p_{n-1}"'] & E_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Soit z un cycle dans E_n, la surjectivité de P_n implique qu'on peut trouver un relèvement de z dans D_n. Notons $\tilde{z}$ un choix quelconque de relèvement. La commutativité du carré de droite montre que $p_{n-1}(d\tilde{z}) = 0$. Puisque la suite du bas est exacte, on en déduit que $d\tilde{z}$ est dans l'image de i_{n-1}. Comme i_{n-1} est injectif, on trouve donc un élément unique u de C_{n-1} tel que $i_{n-1}(u) = d\tilde{z}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que u est un cycle. On définit alors $c_n([z]) = [u]$.

Montrons que ce processus est indépendant du relèvement $\tilde{z}$ choisi. Soit $\overline{z}$ un autre relèvement de z, alors leur différence $\tilde{z} - \overline{z}$ est dans l'image de i_n car la suite du haut est exacte. On choisit x dans C_n tel que $i_n(x) = \tilde{z} - \overline{z}$. Par commutativité du carré de gauche, on a $d(\tilde{z} - \overline{z}) = i_{n-1}(d(x))$. Si on note $\tilde{u}$ et $\overline{u}$ les relèvements de $d(\tilde{z})$ et $d(\overline{z})$ dans C_{n-1}, on a donc $\tilde{u} - \overline{u} = d(x)$. On en déduit que $\tilde{u}$ et $\overline{u}$ représentent la même classe d'homologie dans $H_{n-1}(C)$.

Proposition 5.10. *Soit*

$$0 \to C_* \xrightarrow{i} D_* \xrightarrow{p} E_* \to 0$$

une suite exacte courte de complexes de chaînes. On a une suite exacte longue

$$\ldots \to H_n(C) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(p)} H_n(E) \xrightarrow{c_n} H_{n-1}(C) \to \ldots \to H_0(D) \to H_0(E) \to 0$$

On peut expliciter la fonctorialité de cette suite exacte longue. Il faut préciser ce qu'on entend par la catégorie des suites exactes longues. On observe qu'une suite exacte longue est simplement un complexe de chaîne exact (c'est à dire dont l'homologie est nulle en tout degré). On définit alors la catégorie des suites exactes longues comme une sous-catégorie pleine de la catégorie des complexes de chaînes. Concrètement, un morphismes entre deux suites exactes longues est un diagramme de la forme suivante

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & A_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"'] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \dots \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & A_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"'] & 0 \\ \dots \arrow[r] & B_n \arrow[r] & B_{n-1} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & B_1 \arrow[r] & B_0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où tous les carrés sont commutatifs.

Proposition 5.11. *Soit un diagramme commutatif de complexes de chaînes*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_* \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & D_* \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & E_* \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C'_* \arrow[r] & D'_* \arrow[r] & E'_* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes horizontales sont des suites exactes courtes. Alors, on a un morphisme de suites exactes longues

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & H_n(C) \arrow[r, "H_n(i)"] \arrow[d, "H_n(f)"'] & H_n(D) \arrow[r, "H_n(p)"] \arrow[d, "H_n(g)"'] & H_n(E) \arrow[r, "c_n"] \arrow[d, "H_n(h)"'] & H_{n-1}(C) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(f)"'] & \dots \arrow[r] & H_0(E) \to 0 \arrow[d, "H_0(h)"'] \\ {} \arrow[r] & H_n(C') \arrow[r, "H_n(i')"] & H_n(D') \arrow[r, "H_n(p')"] & H_n(E') \arrow[r, "c'_n"] & H_{n-1}(C) \arrow[r] & \dots \arrow[r] & H_0(E') \to 0 \end{tikzcd}$$

où c_n (resp. c'_n) désigne le connectant

Cette proposition est souvent utile à cause de la conséquence suivante.

Proposition 5.12. *Soit un diagramme commutatif de complexes de chaînes*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_* \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & D_* \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & E_* \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C'_* \arrow[r] & D'_* \arrow[r] & E'_* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes horizontales sont des suites exactes courtes. Si deux parmi trois des morphismes f, g and h induisent des isomorphismes en homologie alors c'est aussi le cas pour le troisième.

Preuve. Cela découle de la proposition précédente et du lemme suivant. □

Lemme 5.13 (Lemme des 5). *Considérons un diagramme commutatif dans la catégorie des R-modules*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"'] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & A_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"'] & A_5 \arrow[d, "f_5"'] \\ B_1 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & B_4 \arrow[r] & B_5 \end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes sont des suites exactes longues. Supposons que les morphismes f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes. Alors f_3 est un isomorphisme.

4. Dépendance de l'homologie en l'anneau de coefficients

Soit R et S deux anneaux commutatifs et $R \to S$ un morphisme d'anneaux. On se donne un complexe C_* sur R et on souhaite comprendre l'homologie de $C_* \otimes_R S$ en fonction de celle de C_*. On observe qu'il existe un morphisme naturel

$$H_*(C) \otimes_R S \to H_*(C \otimes_R S)$$

qui envoie $[z] \otimes s$, avec z un cycle de C, sur $[z \otimes s]$. On observe que si z est un bord, $z \otimes s$ est également un bord donc ce morphisme est bien défini.

Ce morphisme n'est en général pas un isomorphisme. Au lieu de mener une étude générale de ce problème, on se contentera de deux cas particuliers. Le cas où S est obtenu à partir de R en inversant un certains nombre d'éléments et le cas où S est obtenu à partir de R en tuant un élément.

PROPOSITION 5.14. *Soit U un ensemble d'éléments de R qui est stable par multiplication. Soit $S = R[U^{-1}]$. Alors le morphisme de comparaison*

$$H_*(C) \otimes_R S \to H_*(C \otimes_R S)$$

est un isomorphisme.

PREUVE. On commence par observer que le foncteur qui envoie un R-module M sur le S-module $M \otimes_R S$ est exact. C'est à dire que, pour toute suite exacte

$$M \to N \to P$$

de R-modules, la suite

$$M \otimes_R S \to N \otimes_R S \to P \otimes_R S$$

est exacte.

On fixe un indice i et on considère la suite exacte

$$0 \to Z_i \to C_i \xrightarrow{d_i} C_{i-1}$$

On peut tensoriser cette suite par S et on obtient une suite exacte

$$0 \to Z_i \otimes_R S \to C_i \otimes_R S \xrightarrow{(d_i)\otimes_R S} C_{i-1} \otimes_R S$$

qui implique que l'application naturelle

$$Z_i \otimes_R S \to Z_i(C \otimes_R S)$$

est un isomorphisme.

On considère alors la suite exacte

$$Z_{i+1} \to C_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} B_i \to 0$$

Le même raisonnement montre alors que l'application naturelle

$$B_i \otimes_R S \to B_i(C \otimes_R S)$$

est un isomorphisme.

Enfin on considère la suite exacte

$$0 \to B_i \to Z_i \to H_i \to 0$$

On applique encore un raisonnement analogue et on trouve que l'application naturelle

$$H_i(C) \otimes_R S \to H_i(C \otimes_R S)$$

est un isomorphisme. □

REMARQUE 5.15. Si l'ensemble U contient des diviseurs de zéro. L'anneau $R[U^{-1}]$ est simplement l'anneau nul. La proposition reste bien-sûr vraie dans ce cas mais n'est pas particulièrement intéressante.

REMARQUE 5.16. On constate que cette proposition est valable pour tout foncteur exact. Plus précisément, étant donné un foncteur exact $F : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_S$ où R et S sont deux anneaux, et étant donné un complexe C de R-modules, il existe un isomorphisme naturel

$$F(H_i(C)) \to H_i(F(C))$$

COROLLAIRE 5.17. *Soit R un anneau intègre et soit K son corps des fractions (par exemple $R = \mathbb{Z}$ et $K = \mathbb{Q}$. Soit C_* un complexe de R-modules. Alors, on dispose d'un isomorphisme naturel*

$$H_i(C) \otimes_R K \to H_i(C \otimes_R K)$$

PREUVE. Il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $U = R - \{0\}$. □

On va maintenant traiter le cas où $S = R/(a)$ est un quotient de R par l'idéal principal engendré par a. Commençons par introduire la définition suivante.

DÉFINITION 5.18. Soit M un R-module. On note $M_{(a)}$ le noyau de l'application

$$\begin{aligned} m_a : & M \to M \\ & m \mapsto am \end{aligned}$$

On appelle $M_{(a)}$ le module de a-torsion de M.

THÉORÈME 5.19. *Soit C un complexe de chaînes sur R. Soit a un élément de R. On suppose que pour tout i, le morphisme*

$$m_a : C_i \to C_i$$

est injectif. Alors le morphisme naturel

$$H_i(C) \otimes_R R/(a) \to H_i(C \otimes_R R/(a))$$

s'intègre dans une suite exacte courte

$$0 \to H_i(C) \otimes_R R/(a) \to H_i(C \otimes_R R/(a)) \to H_{i-1}(C)_{(a)} \to 0$$

PREUVE. Sous ces hypothèses, on a une suite exacte courte de complexes

$$0 \to C_* \xrightarrow{m_a} C_* \to C_* \otimes_R R/(a) \to 0$$

On peut donc considérer la suite exacte longue associée

$$H_i(C_*) \xrightarrow{m_a} H_i(C_*) \to H_i(C_* \otimes_R R/(a)) \to H_{i-1}(C_*) \xrightarrow{m_a} H_{i-1}(C_*)$$

Cette suite exacte longue induit une suite exacte courte

$$0 \to H_i(C)/(\mathrm{im}(m_a)) \to H_i(C \otimes_R R/(a)) \to \ker(m_a : H_{i-1}(C_*) \to H_{i-1}(C_*)) \to 0$$

Le terme de gauche s'identifie avec $H_i(C) \otimes_R R/(a)$ et le terme de droite avec $H_{i-1}(C)_{(a)}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'injection

$$H_i(C) \otimes_R R/(a) \to H_i(C \otimes_R R/(a))$$

est bien le morphisme naturel. $\square$

REMARQUE 5.20. Dans la pratique, on appliquera ce résultat à $R = \mathbb{Z}$. Dans ce cas, pour a un élément de $\mathbb{Z}$, l'hypothèse que m_a est injective est satisfaite dès que C est un complexe de groupes abéliens libres ce qui sera satisfait pour l'homologie singulière et cellulaire.

EXEMPLE 5.21. Considérons par exemple le complexe suivant

$$C_* = \mathbb{Z} \xleftarrow{m_2 \oplus m_2} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xleftarrow{0} 0 \leftarrow 0 \leftarrow \dots$$

où $m_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ désigne la multiplication par 2. Le groupe $H_0(C)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/(2)$. Le groupe $H_1(C)$ est le noyau de $m_2 \oplus m_2$. Il est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Un générateur est donné par la classe de $(1, -1)$

Maintenant, si on le tensorise par $\mathbb{Z}/(2)$, on trouve le complexe

$$C_* \otimes \mathbb{Z}/(2) = \mathbb{Z}/(2) \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2) \xleftarrow{0} 0 \leftarrow 0 \leftarrow \dots$$

En particulier en degré 1, on trouve $H_1(C_* \otimes \mathbb{Z}/(2)) = \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(2)$. Si on applique maintenant le théorème précédent, on trouve une suite exacte courte

$$0 \to H_1(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(2) \to H_1(C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(2)) \to H_0(C)_{(2)} \to 0$$

On constate donc que, dans les deux copies de $\mathbb{Z}/(2)$ dans $H_1(C \otimes \mathbb{Z}/(2))$, l'une vient de $H_1(C)$ et l'autre vient de la 2-torsion dans $H_0(C)$.

5. Produit tensoriel de complexes de chaînes

Étant donnés (C_*, d_*) et (D_*, d_*) deux complexes de chaînes sur un anneau commutatif k, on peut former leur produit tensoriel. C'est un complexe de chaîne noté $C \otimes_k D$. Les k-modules qui le constituent sont donnés par la formule

$$(C \otimes D)_n = \bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes D_j$$

La différentielle

$$\delta : (C \otimes D)_n \to (C \otimes D)_{n-1}$$

envoie un tenseur élémentaire $x \otimes y$ avec $x \in C_i$ et $y \in D_j$ sur $d(x) \otimes y + (-1)^i x \otimes d(y)$. Vérifions que cette formule définit bien une différentielle. Calculons $\delta(\delta(x \otimes y))$ avec $x \in C_i$ et $y \in D_j$. On trouve

$$\delta(\delta(x \otimes y)) = d(d(x)) \otimes y + (-1)^{i-1} d(x) \otimes d(y) + (-1)^i d(x) \otimes d(y) + (-1)^i x \otimes d(d(y)) = 0$$

Il est bon de noter à ce stade que ce calcul justifie le signe qui apparaît dans la formule de δ. La formule naïve

$$\delta(x \otimes y) = d(x) \otimes y + x \otimes d(y)$$

ne serait pas une différentielle.

On veut maintenant comprendre comment l'homologie du produit tensoriel $C \otimes D$ dépend de l'homologie de C et D. On commence par construire un morphisme

$$\kappa_n : \bigoplus_{i+j=n} H_i(C) \otimes_k H_j(D) \to H_n(C \otimes_k D)$$

Étant donné un cycle u dans C_i et un cycle v dans D_j, leur produit tennsoriel est un cycle dans $(C \otimes D)_n$. Par ailleurs si $u = dw$, alors $u \otimes v = \delta(w \otimes v)$. De même, si v est un bord, $u \otimes v$ est un bord. On e déduit que la classe d'homologie représentée par $u \otimes v$ ne dépend que de la classe d'homologie de u et de v. On a bien défini de la sorte un morphisme

$$H_i(C) \otimes H_j(D) \to H_{i+j}(C \otimes D)$$

En assemblant tout ces morphismes pour $i+j = n$, on obtient le morphisme κ_n. Remarquons que κ_n est naturel en C et D.

Théorème 5.22. *Soit k un corps et C et D deux complexes de chaînes sur k. Alors, pour tout n, le morphisme*

$$\kappa_n : \bigoplus_{i+j=n} H_i(C) \otimes_k H_j(D) \to H_n(C \otimes_k D)$$

est un isomorphisme.

Preuve. On va fixer C et montrer le résultat pour des D de plus en plus compliqués. On dira qu'un complexe de chaîne D est bon si le théorème est satisfait pour D.

(1) Si D est le corps de base k concentré en degré 0, on a $C \otimes D \cong C$ donc D est bon.

(2) Si D est le corps de base k concentré en degré n, on observe que $C \otimes D = C[n]$ donc D est bon.

(3) Si $D = \bigoplus_{i \in I} D_i$ est une somme directe de complexes et que pour tout i le complexe D_i est bon, alors D est bon. En effet, le morphisme κ_n pour D est la somme directe des morphismes κ_n pour chaque D_i qui sont tous des isomorphismes par hypothèse.

(4) Si D est un complexe avec une différentielle nulle, alors D est bon. En effet, en choisissant une base en chaque degré, on a $D \cong \bigoplus_i k[n_i]$ et le résultat découle de (2) et (3).

(5) Si D est homotopiquement équivalent à un complexe qui est bon alors D est bon. En effet, si $f : D \to D'$ est une équivalence d'homotopie avec D' bon. On obtient que $C \otimes D \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes f} C \otimes D'$ est une équivalence d'homotopie. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i+j=n} H_i(C) \otimes H_j(D) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(C \otimes D) \arrow[d] \\
\bigoplus_{i+j=n} H_i(C) \otimes H_j(D') \arrow[r] & H_n(C \otimes D')
\end{tikzcd}$$

où les morphismes verticaux sont induits par f et sont donc des isomorphismes et où le morphisme du bas est un isomorphisme par hypothèse. Cela montre que le morphisme du haut est aussi un isomorphisme.

(6) Le cas général est maintenant une conséquence de (4) et (5) et du fait que tout complexe de chaîne sur k est homotopiquement équivalent à un comlexe de chaîne avec une différentielle nulle (Proposition 5.7). □

6. Mélanges et morphisme d'Eilenberg-Zilber

Définition 5.23. Soient p et q deux entiers positifs. Un (p, q)-mélange est une paire d'applications croissantes (μ, ν) avec $\mu : [p+q] \to [p]$ et $\nu : [p+q] \to [q]$ satisfaisant les deux conditions suivantes

(1) Les applications μ et ν sont surjectives.
(2) Pour $i \in \{0, \dots, p+q-1\}$, on a $\mu(i+1) = \mu(i)$ si et seulement si $\nu(i+1) = \nu(i) + 1$.

On note $\mathrm{mel}_{p,q}$ l'ensemble des (p, q)-mélanges.

Remarque 5.24. Noter que pour une application croissante surjective $\alpha : [m] \to [n]$, et pout tout $i \in \{0, \dots, m-1\}$ on a ou bien $\alpha(i+1) = \alpha(i)$ ou bien $\alpha(i+1) = \alpha(1) + 1$. A partir de cette observation, on peut donc déduire que la condition (2) de la définition d'un (p, q)-mélange est 'equivalente à la condition

(2)' Pour $i \in \{0, \dots, p+q-1\}$, on a $\nu(i+1) = \nu(i)$ si et seulement si $\mu(i+1) = \mu(i) + 1$.

Elle est aussi équivalente à la condition

(2)" L'application $i \mapsto \mu(i) + \nu(i)$ est l'application identité de $[p+q]$.

En particulier cette dernière condition montre qu'il est suffisante de se donner l'une des deux applications d'un (p, q)-mélange, l'autre est alors uniquement déterminée.

Exemple 5.25. Soit l' application $\mu : [8] \to [5]$ donnée par

$$\mu(0) = 0, \mu(1) = 0, \mu(2) = 1, \mu(3) = 2, \mu(4) = 2, \mu(5) = 2, \mu(6) = 3, \mu(7) = 4, \mu(8) = 5$$

et l'application $\nu : [8] \to [3]$ donnée par

$$\nu(0) = 0, \nu(1) = 1, \nu(2) = 1, \nu(3) = 1, \nu(4) = 2, \nu(5) = 3, \nu(6) = 3, \nu(7) = 3, \nu(8) = 3$$

Clairement μ et ν sont surjectives. Par ailleurs la condition (2)" de la remarque précédente est vérifiée donc (μ, ν) est un $(5, 3)$-mélange.

Pour une application croissante surjective $\alpha : [m] \to [n]$, on appelle saut de α un élément i de $\{0, \dots, m-1\}$ tel que $\alpha(i+1) = \alpha(i)+1$. On note $s(\alpha)$ l'ensemble ordonné des sauts de α. Par exemple pour les applications μ et ν de l'exemple précédent, on a $s(\mu) = (1, 2, 5, 6, 7)$ et $s(\nu) = (0, 3, 4)$. Si (μ, ν) est un (p, q)-mélange, on note $s(\mu, \nu)$ la concaténation de $s(\mu)$ et $s(\nu)$. En reprenant l'exemple précédent on a $s(\mu, \nu) = (1, 2, 5, 6, 7, 0, 3, 4)$. La définition d'un (p, q)-mélange implique facilement que tous les éléments de $\{0, \dots, p+q-1\}$ figurent une et une seule fois dans $s(\mu, \nu)$. On peut donc interpréter $s(\mu, \nu)$ comme une permutation de $\{0, \dots, p+q-1\}$.

Proposition 5.26. *L'application $(\mu, \nu) \mapsto s(\mu, \nu)$ est une bijection de l'ensemble des (p, q)-mélanges vers l'ensemble des permutations σ de $\{0, \dots, p+q-1\}$ satisfaisant les conditions*

$$\sigma(0) < \sigma(1) < \ldots < \sigma(p-1) \text{ et } \sigma(p) < \ldots < \sigma(p+q-1)$$

Preuve. Puisque, comme on l'a vu, une application croissante surjective $[p+q] \to [p]$ est déterminée par l'ensemble des ses sauts, il existe une unique application $\mu : [p+q] \to [p]$ (resp. $\nu : [p+q] \to [q]$) telle que $s(\mu) = (\sigma(0), \dots, \sigma(p-1))$ (resp. $s(\nu) = (\sigma(p), \dots, \sigma(p+q-1))$). Il est alors facile de vérifier que (μ, ν) est bien un (p, q)-mélange et que cette constrution est un inverse pour s. □

Définition 5.27. Soit (μ, ν) un (p, q)-mélange. On appelle signature de (μ, ν) et on note $\epsilon(\mu, \nu)$ la signature de la permutation $s(\mu, \nu)$.

On a la propriété important suivante

Proposition 5.28. *Soit (μ, ν) un (p, q)-mélange (de sorte que (ν, μ) est un (q, p)-mélange). Alors, on a l'égalité*

$$\epsilon(\mu, \nu) = (-1)^{pq} \epsilon(\nu, \mu)$$

Preuve. Soit σ une permutation quelconque de $\{0, \ldots, p+q-1\}$. La signature de σ est par définition le produit

$$\prod_{i=0}^{p+q-1} \prod_{j=i+1}^{p+q-1} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{|\sigma(j)-\sigma(i)|}$$

En d'autres termes, on a un facteur $+1$ pour toute paire (i,j) avec $i<j$ et $\sigma(i)<\sigma(j)$ et un facteur -1 pour toute paire (i,j) avec $i<j$ et $\sigma(i)>\sigma(j)$. Notons σ la permutation $s(\mu,\nu)$. Dans le produit précédent, tous les facteurs correspondants aux paires (i,j) avec $i<j\leq p-1$ ou $p\leq i<j$ donneront 1, on peut donc les oublier et le produit se simplifie en

$$\epsilon(\mu,\nu) = \prod_{i=0}^{p-1} \prod_{j=p}^{p+q-1} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{|\sigma(j)-\sigma(i)|} = \prod_{i=0}^{p-1} \prod_{j=0}^{q-1} \frac{\sigma(p+j)-\sigma(i)}{|\sigma(p+j)-\sigma(i)|}$$

Notant $\tau = s(\nu,\mu)$, une analyse similaire nous donne

$$\epsilon(\nu,\mu) = \prod_{j=0}^{q-1} \prod_{i=0}^{p-1} \frac{\tau(q+i)-\tau(j)}{|\tau(q+i)-\tau(j)|}$$

Par définition de σ et τ, on constate que $\tau(q+i)=\sigma(i)$ et $\tau(j)=\sigma(p+j)$. On a donc

$$\epsilon(\nu,\mu) = \prod_{j=0}^{q-1} \prod_{i=0}^{p-1} \frac{\sigma(i)-\sigma(p+j)}{|\sigma(i)-\sigma(p+j)|} = (-1)^{pq}\epsilon(\mu,\nu)$$

□

À partir de maintenant, on fixe R un anneau commutatif. On utilise la notation $\otimes$ pour désigner le produit tensoriel sur R. Étant donné deux objets simpliciaux dans $\mathbf{Mod}_R$ $X_\bullet$ et $Y_\bullet$. Leur produit tensoriel $X\otimes Y$ est un R-module simplicial défini par la formule

$$(X\otimes Y)_n = X_n \otimes Y_n$$

Construction 5.29. Le morphisme d'Eilenberg-Zilber est un morphisme de complexes de chaînes

$$EZ_{X,Y} : C(X)\otimes C(Y) \to C(X\otimes Y)$$

qui est naturel en X et Y (c'est à dire qu'il définit une transformation naturelle entre deux foncteurs $(s\mathbf{Mod}_R)^2 \to \mathbf{Ch}_*(R)$. Étant donné $x\in C_p(X)$ et $y\in C_q(Y)$, on aura $EZ(x\otimes y)\in C_{p+q}(X\otimes Y)$ défini de la façon suivante :

$$EZ(x\otimes y) = \sum_{(\mu,\nu)\in \mathrm{mel}_{p,q}} \epsilon(\mu,\nu)\mu^*(x)\otimes\nu^*(y)$$

Quelques précisions sur cette formule. Le facteur $\epsilon(\mu,\nu)$ est la signature du mélange (μ,ν). C'est un élément de $\{-1,1\}$ qu'on peut voir comme un élément de R de manière évidente (en particulier en caractéristique 2, on peut oublier ces facteurs). On a noté μ^* (resp. ν^*) l'application $X_p\to X_{p+q}$ (resp. $X_q\to X_{p+q}$) induite par μ (resp. ν).

Les deux propositions suivantes décrivent une propriété d'associativité et de commutativité du morphisme d'Eilenberg-Zilber.

Proposition 5.30. *Soient X, Y et Z trois R-modules simpliciaux. Soient $x\in X_p$, $y\in Y_q$ et $z\in Z_r$. Alors, on a l'égalité suivante dans $C_{p+q+r}(X\otimes Y\otimes Z)$.*

$$EZ_{X\otimes Y,Z}(EZ_{X,Y}(x\otimes y)\otimes z) = EZ_{X,Y\otimes Z}(x\otimes EZ_{Y,Z}(y\otimes z))$$

Remarque 5.31. Il faut noter que cette proposition cache un abus de notation. Le membre de gauche de l'équation vit dans $C_{p+q+r}((X\otimes Y)\otimes Z))$ alors que le membre de droite vit dans $C_{p+q+r}(X\otimes(Y\otimes Z))$. Pour donner du sens à la proposition, il faut donc appliqer l'isomorphisme canonique entre ces deux espaces R-modules simpliciaux.

Preuve. On va introduire une troisième expression plus symétrique en X, Y et Z et on comparera les deux membres de l'équation à cette troisième expression.

On note $EZ_{X,Y,Z}$ l' application

$$C_p(X) \otimes C_q(Y) \otimes C_r(Z) \to C_{p+q+r}(X \otimes Y \otimes Z)$$

définie de la façon suivante

$$EZ_{X,Y,Z}(x \otimes y \otimes z) = \sum_{(\mu,\nu,\xi) \in \mathrm{mel}_{p,q,r}} \epsilon(\mu,\nu,\xi)\mu^*(x) \otimes \nu^*(y) \otimes \xi^*(z)$$

On somme sur tout les (p,q,r)-mélanges. Un (p,q,r) mélange est un triplet de surjections $\mu : [p+q+r] \to [p]$, $\nu : [p+q+r] \to [q]$, $\xi : [p+q+r] \to [r]$ tels que les sauts de μ, ν et ξ forment une partition de l'ensemble $\{0, \dots, p+q+r-1\}$. On laisse le soin au lecteur de définir la signature d'un (p,q,r) mélange.

Montrons l'égalité

$$EZ_{X \otimes Y, Z}(EZ_{X,Y}(x \otimes y) \otimes z) = EZ_{X,Y,Z}(x \otimes y \otimes z)$$

Le membre de gauche de l'équation est donné par la somme suivante

$$\sum_{(\pi,\xi) \in \mathrm{mel}_{p+q,r}} \sum_{(\mu,\nu) \in \mathrm{mel}_{p,q}} \epsilon(\pi,\rho)\epsilon(\mu,\nu)\pi^*(\mu^*(x)) \otimes \pi^*(\nu^*(y)) \otimes \xi^*(z)$$

qui, en utilisant le fait que X et Y sont des foncteurs peut se réécrire comme

$$\sum_{((\pi,\xi),(\mu,\nu)) \in \mathrm{mel}_{p+q,r} \times \mathrm{mel}_{p,q}} \epsilon(\pi,\rho)\epsilon(\mu,\nu)[(\mu \circ \pi)^*(x) \otimes (\nu \circ \pi)^*(y) \otimes \xi^*(z)]$$

On laisse alors au lecteur le soin de vérifier que l'application

$$\mathrm{mel}_{p+q,r} \times \mathrm{mel}_{p,q} \to \mathrm{mel}_{p,q,r}$$

qui envoie $((\pi,\xi),(\mu,\nu))$ sur $(\mu \circ \pi, \nu \circ \pi, \rho)$ est une bijection (remarque : il est facile de vérifier que les deux ensembles ont le même cadinal).

On prouve de façon complètement similaire l'égalité

$$EZ_{X, Y \otimes Z}(x \otimes EZ_{Y,Z}(y \otimes z)) = EZ_{X,Y,Z}(x \otimes y \otimes z)$$

□

Proposition 5.32. *Soient X et Y deux k-modules simpliciaux et $x \in X_p$, $y \in Y_q$. Alors, on a la formule*

$$EZ_{X,Y}(x \otimes y) = (-1)^{pq} EZ_{Y,X}(y \otimes x)$$

Remarque 5.33. Ici encore, il faut appliquer l'isomorphisme canonique $C_{p+q}(X \otimes Y) \cong C_{p+q}(Y \otimes X)$ pour que les deux membres de l'équation vivent dans le même R-module.

Preuve. On a la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
EZ_{X,Y}(x \otimes y) &= \sum_{(\mu,\nu) \in \mathrm{mel}_{p,q}} \epsilon(\mu,\nu)\mu^*(x) \otimes \nu^*(y) \\
&= \sum_{(\nu,\mu) \in \mathrm{mel}_{q,p}} \epsilon(\mu,\nu)\mu^*(x) \otimes \nu^*(y) \\
&= \sum_{(\nu,\mu) \in \mathrm{mel}_{q,p}} \epsilon(\mu,\nu)\nu^*(y) \otimes \mu^*(x) \\
&= \sum_{(\nu,\mu) \in \mathrm{mel}_{q,p}} (-1)^{pq}\epsilon(\nu,\mu)\nu^*(y) \otimes \mu^*(x) = (-1)^{pq} EZ_{Y,X}(y \otimes x)
\end{aligned}$$

La première égalité est une conséquence de la bijection évidente $\mathrm{mel}_{p,q} \cong \mathrm{mel}_{q,p}$ qui envoie (μ,ν) sur (ν,μ). La deuxième égalité est la commutativité du produit tensoriel. La troisième égalité découle de la Proposition 5.28. □

Enfin, on a la proposition suivante, qu'on admettra, affirmant que le morphisme d'Eilenberg-Zilber définit bien un morphisme de complexes de chaînes

$$C_*(X) \otimes C_*(Y) \to C_*(X \otimes Y)$$

PROPOSITION 5.34. *Soit $x \in X_p$ et $y \in Y_q$, on a la formule*

$$dEZ(x \otimes y) = EZ(dx \otimes y) + (-1)^p EZ(x \otimes dy)$$

CHAPITRE 6

Homologie singulière

1. Ensemble simplicial singulier

Pour k un entier, on définit Δ^k le k-simplexe standard.

Définition 6.1. L'espace Δ^k est le sous espaces de I^{k+1} formé des $(k+1)$-uplets $(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ tels que

$$\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$$

Remarque 6.2. Cet espace est homéomorphe à l'enveloppe convexe des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{k+1}$. On a $\Delta^0 = pt$, $\Delta^1 \cong [0,1]$, Δ^2 est un triangle plein, etc. On peut aussi vérifier que Δ^k est homéomorphe à la boule unité fermée de dimension k.

Construction 6.3. On va construire un foncteur

$$s : \Delta \to \mathbf{Top}$$

qui envoie $[k]$ sur Δ^k.

Rappellons que la catégorie Δ est la catégorie dont les objets sont les ensemble ordonnés $[k] = \{0, 1, \ldots, k\}$ et dont les morphismes sont les applications croissantes. Étant donnée une application croissante $\sigma : [k] \to [l]$, on construit une application continue $s(\sigma) : \Delta^k \to \Delta^l$ par la formule suivante

$$s(\sigma)(t_0, t_1, \ldots, t_k) = \left(\sum_{i \in \sigma^{-1}(0)} t_i, \sum_{i \in \sigma^{-1}(1)} t_i, \ldots, \sum_{i \in \sigma^{-1}(l)} t_i \right)$$

On utilise la convention qu'une somme vide est égale à zéro. On laisse au lecteur le soin de vérifier que cela définit bien un foncteur de Δ vers **Top**.

Définition 6.4. Soit X, un espace topologique. L'ensemble simplicial singulier de X est le foncteur $\mathrm{Sing}(X) : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$ qui envoie $[k]$ sur $\mathrm{Hom}(\Delta^k, X)$. L'association $X \mapsto \mathrm{Sing}(X)$ définit un foncteur de **Top** vers $\mathbf{Ens}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$.

La catégorie $\mathbf{Ens}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ notée aussi $s\mathbf{Ens}$ est appelée la catégorie des ensembles simplciaux. C'est simplement la catégorie des préfaisceaux sur Δ. Un morphisme d'ensemble simpliciaux est donc simpleemtn une transformation naturelle.

On va montrer que le foncteur Sing préserve les homotopies entre applications. Il faut d'abord définir ce qu'est une homotopie entre applications 'd'ensembles simpliciaux. On note $\Delta[k]$ le foncteur $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ens}$ représenté par $[k]$. Il ne faut pas confondre avec Δ^k qui est un espace topologique. Les deux applications croissantes $[0] \to [1]$ induisent deux applications $\Delta[0] \to \Delta[1]$ qu'on note i_0 et i_1.

Définition 6.5. Soient f_0 et f_1 deux morphismes $X \to Y$ entre ensembles simpliciaux. Une homotopie simpliciale entre f_0 et f_1 et la donnée d'une application d'ensembles simpliciaux

$$H : X \times \Delta[1] \to Y$$

telle que pour $k = 0, 1$, la composée

$$X \cong X \times \Delta[0] \xrightarrow{\mathrm{id} \times i_k} X \times \Delta[1] \xrightarrow{H} Y$$

coïncide avec f_k.

Proposition 6.6. *Soient X et Y deux espaces topologiques. Soient f_0 et f_1 deux applications continues de X vers Y qui sont homotopes. Alors, il existe une homotopie simpliciale entre* $\mathrm{Sing}(f_0)$ *et* $\mathrm{Sing}(f_1)$.

Preuve. On construit d'abord un morphisme $\Delta[1] \to \mathrm{Sing}(I)$. Par le lemme de Yoneda, il s'agit simplement de choisir un 1-simplexe dans $\mathrm{Sing}(I)$, c'est à dire une application continue $\Delta^1 \to [0,1]$. On utiliser l'application $(t_0, t_1) \mapsto t_0$.

On note $H : X \times I \to Y$ l'homotopie entre f_0 et f_1. On construit une homotopie entre $\mathrm{Sing}(f_0)$ et $\mathrm{Sing}(f_1)$ par la composée suivante

$$\mathrm{Sing}(X) \times \Delta[1] \to \mathrm{Sing}(X) \times \mathrm{Sing}(I) \cong \mathrm{Sing}(X \times I) \xrightarrow{\mathrm{Sing}(H)} \mathrm{Sing}(Y)$$

□

2. Homologie singulière

Soit R un anneau commutatif, on rappelle qu'on dispose d'un foncteur R-module libre qui envoie un ensemble S sur le R-module $R\langle S\rangle$ dont les éléments sont les sommes formelles

$$\sum_{s \in S} a_s.s$$

avec $a_s \in R$ et $a_s = 0$ pour tous les s sauf peut-être un nombre fini.

On note $C_*(-;R)$ le foncteur $\mathbf{Top} \to \mathbf{Ch}_*(R)$ donné par la composition de foncteurs suivants.

$$\mathbf{Top} \xrightarrow{\mathrm{Sing}} s\mathbf{Ens} \xrightarrow{R\langle - \rangle} s\mathbf{Mod}_R \xrightarrow{C_*(-)} \mathbf{Ch}_*(R)$$

Définition 6.7. Pour X un espace topologique. Les groupes d'homologie singulière de X à coefficients dans R sont les groupes d'homologie du complexe $C_*(X;R)$. On note $H_i(X;R)$ le i-ème groupe d'homologie.

3. Propriétés élémentaires de l'homologie

Proposition 6.8. *L'homologie d'un point est donnée par*

$$H_0(pt;R) = R$$
$$H_i(pt;R) = 0 \text{ si } i \neq 0$$

Preuve. En effet, le complexe de chaîne singulières est donné par $C_i(pt) = R$ pour tout i. La différentielle d_i est donnée par la formule

$$d_i = (1 + (-1)^i)\mathrm{id}$$

On peut alors calculer sans difficultés □

Proposition 6.9. *L'association $X \mapsto H_i(X;R)$ est un foncteur de* $\mathbf{hTop}$ *vers* $\mathbf{Mod}_R$.

Preuve. Il s'agit de montrer que s'il existe une homotopie h entre deux applications f et g de X vers Y, les applications induites en homologies coïncident. On va en fait montrer plus précisément qu'il existe une homotopie entre les morphismes de complexes de chaînes $C_*(f;R)$ et $C_*(g;R)$.

Notons I_* "l'intervalle algébrique". Il s'agit d'un complexe de chaîne avec deux générateurs x_0 et x_1 en degré 0 et un générateur y en degré 1. La différentielle est donnée par $d(y) = x_1 - x_0$ On dispose de deux morphismes i_0 et i_1 de R vers I_* (auxquels ils faut penser comme les extrémités de l'intervalle) qui envoient $1 \in R$ sur x_0 et x_1 respectivement. On constate que pour tous complexes C et D, il est équivalent de se donner une homotopie algébrique entre $f_0 : C \to D$ et $f_1 : C \to D$ ou de se donner un morphismes de complexes de chaînes

$$H : I \otimes_R C \to D$$

telle que, pour $k = 0, 1$, la composée

$$C \cong R \otimes_R C \xrightarrow{i_k} I \otimes_R C \to D$$

soit égale à f_k.

Par ailleurs, il existe un morphisme très naturel de complexes de chaînes $\alpha : I_* \to C_*(I;R)$. Notons u_0 et u_1 les deux extrémités de l'intervalles (qu'on voit comme des éléments de $C_0(I;R)$) et $v : \Delta^1 \to I$ l'homéomorphisme qui envoie (t_0, t_1) sur t_0 (vu comme un élément de $C_1(I; R)$). On pose alors $\alpha(y) = v$, $\alpha(x_0) = u_0$ et $\alpha(x_1) = u_1$. On vérifie immédiatement qu'α ainsi défini est bien un morphisme de complexes de chaînes.

On peut alors construire une homotopie algébrique entre $C_*(f; R)$ et $C_*(g; R)$ comme la composée suivante

$$C_*(X) \otimes_R I_* \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\alpha} C_*(X) \otimes_R C_*(I; R) \xrightarrow{\times} C_*(X \times I; R) \xrightarrow{C_*(h;R)} C_*(Y; R)$$

où le morphisme $\times$ est simplement le produit cartésien des chaînes singulières (voir la dernière section de ce chapitre). $\square$

Corollaire 6.10. *Si deux espaces sont homotopiquement équivalents, leurs homologies sont isomorphes.*

Proposition 6.11. *Soit X un espace topologique. Soit $X_0 \subset X_1 \subset \ldots$ une suite croissante de sous-espaces. On suppose que pour tout k, toute application continue $\Delta^k \to X$ se factorise par X_i pour un certain i. Alors, le morphisme évident*

$$\mathrm{colim}_{n\in\mathbb{N}}\, H_*(X_n; R) \to H_*(X; R)$$

est un isomorphisme.

Avant de donner la preuve il peut-être utile d'expliciter ce qu'est une colimite de R-modules indexées par l'ensemble partiellement ordonné $\mathbb{N}$. Considérons donc

$$M_0 \xrightarrow{i_0} M_1 \xrightarrow{i_1} \ldots$$

un diagramme de R-modules indexé par $\mathbb{N}$. Alors la colimite de ce diagramme peut se construire comme le quotient de la somme directe $\oplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$ par le sous-module engendré par les élements de la forme $m_n - i_n(m_n)$ avec $m_n \in M_n$. En effet, il est facile de voir que se donner un morphisme de ce quotient vers un R-module quelconque T, c'est se donner un morphisme $f_n : M_n \to T$ pour tout n tels que tout les triangles

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "i_n"'] & T \\ M_{n+1} \arrow[ur, "f_{n+1}"'] & \end{tikzcd}$$

commutent, ce qui est bien la propriété universelle désirée.

Preuve. En effet, sous cette hypothèse, le morphisme évident

$$\mathrm{colim}_{n\in\mathbb{N}}\, C_*(X_n; R) \to C_*(X; R)$$

est un isomorphisme.

Ensuite, il suffit de vérifier l'affirmation plus générale que si l'on dispose d'une suite complexes de chaînes

$$C(0) \to C(1) \to \ldots$$

alors l'application naturelle

$$\phi_* : \mathrm{colim}_n\, H_*(C(n)) \to H_*(\mathrm{colim}_n\, C(n))$$

est un isomorphisme.

Montrons donc que ϕ_* est surjective. Notons $C(\infty)$ la colimite des $C(n)$ et soit x un élément de $H_k(C(\infty))$. Alors x est représentée par un cycle z de $C(\infty)_k$. Par définition de la colimite, z est l'image d'un cycle de $C(n)$ pour n suffisament grand et donc x est dans l'image de $H_k(C(n))$. Cela montre la surjectivité de ϕ. Montrons maintenant l'injectivité. Soit x un élément de $\mathrm{colim}_n\, H_k(C(n))$ qui s'envoie sur 0 dans $H_k(C(\infty))$. On peut donc voir x comme un élément de $H_k(C(n))$ dont l'image dans $H_k(C(\infty))$ est nulle. L'élement x peut se représenter par un cycle z dans $C(n)$. Dire que $\phi(x)$ est nul revient à dire que $z = d(u)$ avec u dans $C(\infty)$ et donc dans $C(m)$ pour un certain $m \geq n$. Cela implique donc que l'image de x dans $H_k(C(m))$ est nulle et par conséquent que l'image de x dans la colimite $\mathrm{colim}_n(H_k(C(n)))$ est nulle. $\square$

Proposition 6.12. *Soit $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ dans la catégorie des espaces topologiques, alors l'application naturelle*

$$\bigoplus_{i\in I} H_*(X_i; R) \to H_*(X; R)$$

est un isomorphisme.

Preuve. La preuve est tout à fait analogue (mais plus simple) à celle de la proposition précédente. On laisse le soin au lecteur d'en rédiger les détails. $\square$

Soit X un espace topologique et $\pi_0(X)$ l'ensemble de ses composantes connexes par arcs. Pour $s \in \pi_0(X)$, on peut choisir une application continue $x_s : pt \to X$. Ces points forment des éléments de $C_0(X)$. On en déduit donc un morphisme

$$\phi : \bigoplus_{s\in\pi_0(X)} R \to C_0(X;R)$$

Proposition 6.13. *La composée*

$$\overline{\phi} : \bigoplus_{s\in\pi_0(X)} R \xrightarrow{\phi} C_0(X;R) \to C_0(X;R)/\operatorname{im}(d_1) = H_0(X;R)$$

est un isomorphisme.

Preuve. Soit x un point de X. On peut trouver un chemin y reliant x à x_s pour un unique s. Ce chemin définit une application continue $\Delta^1 \to X$ et donc un élément dans $C_1(X;R)$. On a la formule

$$d_1(y) = x - x_s$$

qui montre que la classe d'homologie représentée par X est égale à celle représentée par x_s. On montre de même que la classe d'homologie représentée par une somme $\sum_i a_i x_i$ est homologue à une classe dans l'image de ϕ. On a donc montré la surjectivité de $\overline{\phi}$.

Construisons un morphisme

$$\psi : C_0(X;R) \to \bigoplus_s R$$

Puisque $C_0(X;R)$ est le R-module libre engendré par les points de X, il suffit de définir $\psi(x)$ pour x un point de X. On définit $\psi(x)$ comme le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles à part celle de la composante connexe par arcs contenant x qui vaut 1. On vérifie sans difficultés que la composée $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$. Par ailleurs, si $y = \sum_i a_i\gamma_i$ est un élément de $C_1(X;R)$, on a $d_1(y) = \sum_i a_i(\gamma_i(1) - \gamma_i(0))$ et donc $\psi(d_1(y)) = 0$. Cela montre que ψ se factorise à travers $H_0(X;R)$. On note $\overline{\psi}$ cette factorisation. La composée

$$\bigoplus_s R \xrightarrow{\overline{\phi}} H_0(X;R) \xrightarrow{\overline{\psi}} \bigoplus_s R$$

est l'identité. Cela implique l'injectivité de $\overline{\phi}$ (et accessoirement que $\overline{\psi}$ est l'inverse de $\overline{\phi}$. $\square$

En fait, on peut améliorer cette Proposition et la rendre naturelle en X. Pour celà on considère le foncteur $\mathbf{Top} \to \mathbf{Mod}_R$ qui envoie X sur $R\langle\pi_0(X)\rangle$. Il est facile de voir que le morphisme $\overline{\psi}$ qui apparaît dans la preuve ci-dessus est en fait une transformation naturelle de foncteurs de sorte qu'on a prouvé la Proposition suivante.

Proposition 6.14. *Le foncteur $X \mapsto H_0(X;R)$ est naturellement isomorphe au foncteur $X \mapsto R\langle\pi_0(X)\rangle$.*

4. Morphisme d'Hurewicz

Le but de cette section est d'étudier le premier groupe d'homologie à coefficients entiers et de montrer qu'il est déterminé par le groupe fondamental. On effectuera souvent dans cette section l'identification $\Delta^1 \cong [0,1]$ donnée par la fromule $(t_0,t_1) \mapsto t_0$.

On commence par le lemme suivant.

Lemme 6.15. (1) *Soit $\gamma : \Delta^1 \to X$ une application contine et soit $\overline{\gamma} : \Delta^1 \to X$ l'application continue donnée par la formule*

$$\overline{\gamma}(t_0,t_1) = \gamma(t_1,t_0)$$

Alors $\gamma + \overline{\gamma}$ est un 1-bord de X.

(2) *Soient $\gamma : [0,1] \to X$ et $\gamma' : [0,1] \to X$ deux applications continues. Supposons que $\gamma(1) = \gamma'(0)$, alors l'élément $\gamma \star \gamma' - \gamma - \gamma'$ est un 1-bord de X.*

Preuve. On montre la partie (1). L' autre est similaire et laissée en exercice au lecteur.

Il est tout à fait élémentaire que $\gamma + \overline{\gamma}$ est un 1-cycle. Considérons l'application continue $\sigma : \Delta^2 \to X$ donnée par la formule

$$\sigma(t_0, t_1, t_2) = \gamma(t_0 + t_2, t_1)$$

On peut calculer sans peine la différentielle de σ et on trouve

$$d(\sigma)(t_0, t_1) = \gamma(t_1, t_0) - \gamma(t_0 + t_1, 0) + \gamma(t_0, t_1)$$

On a donc $d(\sigma) = \overline{\gamma} + \gamma - c$ où c désigne l'application continue constante $c(t_0, t_1) = \gamma(1, 0)$. L'application c est de façon évidente un cycle et on vérifie que $c = d(\tau)$ où τ est l'application continue constante $\Delta^2 \to X$ prenant la valeur $\gamma(1, 0)$. On a donc $\gamma + \overline{\gamma} = d(\sigma + \tau)$. □

Définition 6.16. Soit X un espace topologique. On appelle 1-cycle élémentaire de X une application continue $\gamma : [0, 1] \to X$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Remarque 6.17. En identifiant $[0, 1]$ à Δ^1, on constate que les 1-cycles élémentaires produisent des éléments de $C_1(X)$. Par ailleurs, la condition $\gamma(0) = \gamma(1)$ implique que ces éléments sont bien des cycles. En identifiant S^1 au quotient de $[0, 1]$ par la relation déquivalence $0 \sim 1$, on peut aussi voir l'ensemble des 1-cycles élémentaires comme l'ensemble des applications continues $S^1 \to X$.

Proposition 6.18. *Le groupe $H_1(X)$ est engendré en tant que groupe abélien par les 1-cycles élémentaires.*

Preuve. Autrement dit, il s'agit de montrer que toute classe d'homologie dans $H_1(X)$ peut être représentée par une combinaison linéaire à coefficients entiers de 1-cycles élémentaires.

Soit $z = \sum_i a_i \gamma_i$ un cyle dans $C_1(X)$ (les a_i sont des nombres entiers et les γ_1 sont des applications continues de Δ^1 dans X. Quitte à s'autoriser des répétitions dans les γ_i, on peut supposer que les coefficients a_i sont égaux à 1 ou -1. Quitte à remplacer γ_i par $\overline{\gamma}_i$, et en utilisant le lemme précédent, on peut supposer que les a_1 sont tous égaux à 1, on a donc $z = \sum_i \gamma_i$. Notons $x_i = \gamma_i(0)$ et $y_i = \gamma_i(1)$. La condition que z_i est un cycle se traduit par l'équation

$$\sum_i y_i - x_i = 0$$

En d'autres termes, l' ensemble des points x_i est égal à l'ensemble des points y_i (en prenant en compte les répétitions éventuelles). Si $y_i = x_j$ avec $i \neq j$, en utilisant le lemme précédent, on peut remplacer $\gamma_i + \gamma_j$ par $\gamma_i \star \gamma_j$ dans z et on trouve un cycle qui représente la même classe d'homologie. Après application de ce procédé un nombre fini de fois, on peut supposer que pour tout i, $x_i = y_i$ ce qui est précisément dire que z est une somme de 1-cycles élémentaires. □

Nous somme maintenant en mesure de prouver le théorème d'Hurewicz. On commence par définir le morphisme d'Hurewicz. On se donne (X, x) un espace connexe pointé. On construit une application

$$\mathcal{H} : \pi_1(X, x) \to H_1(X)$$

qui envoie un chemin $\gamma : [0, 1] \to X$ avec $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ sur la classe d'homologie du 1-cycle élémentaire qu'il représente.

Proposition 6.19. *L'application $\mathcal{H}$ est un morphisme de groupe.*

Preuve. Celà découle du Lemme 6.15. □

On constate aisément que ce morphisme ne peut pas être un isomorphisme en général car $\pi_1(X, x)$ peut être un groupe non-abélien. Cependant, comme on va le voir, il s' agit de la seule obstruction. En effet, le théorème d'Hurewicz affirme que $H_1(X)$ est la "meilleure approximation" de $\pi_1(X, x)$ par un groupe abélien. La définition et la proposition suivante donnent une formulation précise à cette idée de meilleure approximation.

Définition 6.20. Soit G un groupe, on appelle commutateur de G un élément de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$. On définit l'abélianisation de G notée G^{ab} comme le quotient de G par le groupe engendré par les commutateurs.

Vérifions que le groupe engendré par les commutateurs est un sous-groupe normal. Il est facile de voir que tout morphisme de groupe $H \to K$ doit envoyer un commutateur de G sur un commutateur de K. On en déduit que tout automorphisme de G doit préserver le groupe engendré par les commutateurs. En particulier, ce sous-groupe est fixé par les automorphismes intérieurs, il est donc normal.

On a donc une structure de groupe sur G^{ab} telle que l'application quotient $G \to G^{ab}$ soit un morphisme de groupe.

PROPOSITION 6.21. *Tout morphisme de groupe $f : G \to A$ avec A abélien se factorise de façon unique par $p : G \to G^{ab}$.*

PREUVE. Prenons pour l'instant A quelconque. Considérons l'application

$$\mathrm{Hom}(G^{ab}, A) \to \mathrm{Hom}(G, A)$$

qui envoie g sur $g \circ p$. Cette application est injective et son image est exactement l'ensemble des morphismes de groupes $G \to A$ dont le noyau contient l'ensemble des commutateurs. Maintenant, en utilisant le fait que A est abélien, on constate que tout morphisme de groupe $G \to A$ doit envoyer les commutateurs de G sur zéro. On a donc bien prouvé la proposition. $\square$

REMARQUE 6.22. Le lecteur qui aime le langage catégorique se convaincra que $G \mapsto G^{ab}$ est un foncteur. La proposition précédente affirme que ce foncteur est l'adjoint à gauche de l'inclusion $\mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$.

On a alors le théorème d'Hurewicz.

THÉORÈME 6.23. *Soit (X, x) un espace topologique connexe par arcs. Le morphisme d'Hurewicz*

$$\mathcal{H} : \pi_1(X, x) \to H_1(X)$$

induit un isomorphisme $\pi_1(X, x)^{ab} \cong H_1(X)$.

PREUVE. Pour montrer la surjectivité, il suffit de montrer que tout 1-cycle élémentaire est dans l'image de $\mathcal{H}$. Soit $\gamma : [0, 1] \to X$ un 1-cycle élémentaire. On choisit $\sigma : [0, 1] \to X$ un chemin reliant x à $\gamma(0) = \gamma(1)$. On considère alors le chemin $[0, 1] \to X$ donné par $\sigma \star \gamma \star \overline{\sigma}$. Par le lemme 6.15, ce 1-cyle représente la même classe d'homologie que γ. D'un autre côté, il est de manière évidente dans l'image de $\mathcal{H}$.

Pour montrer l'injectivité, on construit un morphisme $\mathcal{K} : H_1(X) \to \pi_1(X)^{ab}$. On choisit une fois pour toute un chemin σ_y reliant x et y pour tout point y de X. On fixe $\sigma_x = c_x$ le chemin constant à x. Si $\gamma : [0, 1] \to X$ est un chemin quelconque, on définit $\mathcal{K}(\gamma)$ comme la classe d'homotopie du lacet $\sigma_{\gamma(0)} \star \gamma \star \sigma^{-1}_{\gamma(1)}$. On étend ensuite $\mathcal{K}$ en un morphisme de groupe abéliens

$$\mathcal{K} : C_1(X) \to \pi_1(X, x)^{ab}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que $\mathcal{K}$ envoie un bord de $C_1(X)$ sur $0 \in \pi_1(X, x)^{ab}$. On obtient donc un morphisme de groupes abéliens

$$\mathcal{K} : H_1(X) \to \pi_1(X, x)^{ab}$$

Par construction, on a $\mathcal{K} \circ \mathcal{H} = \mathrm{id}$. En particulier, $\mathcal{H}$ est injective. $\square$

5. Homologie des paires

Soit X un espace topologique et A un sous-espace. On dispose alors d'une inclusion de complexes de chaînes

$$C_*(A; R) \to C_*(X; R)$$

On note le conoyau de cette inclusion $C_*(X, A; R)$ de sorte qu'on dispose d'une suite exacte courte de complexes de chaînes

$$0 \to C_*(A; R) \to C_*(X; R) \to C_*(X, A; R) \to 0$$

On note $H_*(X, A; R)$ l'homologie du complexe $C_*(X, A; R)$. Par définition et en utilisant la Propostion 5.10, on dispose d'une suite exacte longue de groupe d'homologies

$$\ldots \to H_i(A) \to H_i(X) \to H_i(X, A) \to H_{i-1}(A) \to H_{i-1}(X) \to \ldots \to H_0(X) \to H_0(X, A) \to 0$$

Définition 6.24. On définit la catégorie des paires d'espaces topologiques comme la catégorie dont les objets sont les paires (X, A) avec X un espace et A un sous-espace de X et dont les morphismes $(X, A) \to (Y, B)$ sont les applications continues $f : X \to Y$ telles que $f(A) \subset B$.

La proposition suivante est alors une conséquence immédiate de la Proposition 5.11.

Proposition 6.25. *L'association $(X, A) \mapsto H_*(X, A;)$ est un foncteur de la catégorie des paires d'espaces topologiques vers la catégorie des R-modules gradués.*

6. Homologie réduite

Soit X un espace topologique, on note $\tilde{C}_*(X; R)$ le noyau du morphisme de complexe

$$C_*(p) : C_*(X; R) \to C_*(pt; R)$$

induit par l'unique application continue $p : X \to pt$. On note $\tilde{H}_*(X; R)$ l'homologie du complexe $\tilde{C}_*(X; R)$. On observe qu'on a un morphisme naturel en X

$$\tilde{H}_i(X; R) \to H_i(X; R)$$

Proposition 6.26. *Pour $i > 0$, le morphisme*

$$\tilde{H}_i(X; R) \to H_i(X; R)$$

est un isomorphisme. Si X est non vide, on a une suite exacte scindée

$$0 \to \tilde{H}_0(X; R) \to H_0(X; R) \to R \to 0$$

Preuve. Cela découle de la Proposition 5.10 appliquée à

$$0 \to \tilde{C}_*(X; R) \to C_*(X; R) \to C_*(pt; R) \to 0$$

Le seul point à vériféer est l'existence d'un scindement quand X est non-vide mais celui-ci est donné par l'application

$$R \cong H_0(pt; R) \to H_0(X; R)$$

induite par n'importe quel choix d'application continue $pt \to X$. □

On observe que le scindement de la preuve ci-dessus n'est pas naturel. Cependant, si on travaille avec des espaces pointés, on peut choisir le scindement induit par le point base et on vérifie qu'on a un isomorphisme

$$H_0(X; R) \cong \tilde{H}_0(X; R) \oplus R$$

naturel en l'espace pointé X.

Proposition 6.27. *Soit (X, x) un espace topologique pointé. Alors, pour tout i, on a un isomorphisme*

$$H_i(X, \{x\}; R) \cong \tilde{H}_i(X; R)$$

naturel en l'espace pointé X.

Preuve. Pour $i > 0$, les deux foncteurs sont isomorphes à $H_i(X; R)$ et il n'y a rien à prouver. Pour $i = 0$, on va montrer que la composée

$$\tilde{H}_0(X; R) \to H_0(X; R) \to H_0(X, \{x\}; R)$$

est un isomorphisme. On rappelle qu'on a un isomorphisme $H_0(X; R) \cong R\langle \pi_0(X) \rangle$. A travers cet isomorphisme, on peut identifier $\tilde{H}_0(X; R)$ au sous-module de $R\langle \pi_0(X) \rangle$ dont les éléments sont les combinaisons linéaires $\sum_{c \in \pi_0(X)} r_c c$ avec $\sum_c r_c = 0$. D'autre part, on peut identifier $H_0(X, \{x\}; R)$ au quotient $R\langle \pi_0(X) \rangle / R\langle \{x\} \rangle$. En utilisant ces isomorphismes, le résultat devient évident. □

7. Suite exacte de Mayer-Vietoris

Soit un espace topologique X. Soient U et V deux sous-espaces tels que $\{\mathrm{int}(U), \mathrm{int}(V)\}$ soit un recouvrement ouvert de X. La suite exacte longue de Mayer-Vietoris nous donne une méthode pour calculer l'homologie de X en fonction de l'homologie de U, de l'homologie de V et de l'homologie de $U \cap V$. On commence par introduire le complexe $C_*^{U,V}(X, R)$. C'est un sous-complexe de $C_*(X; R)$ où $C_n^{U,V}(X; R)$ est le R-module libre sur les applications continues $\Delta^n \to X$ dont l'image est entièrement contenue ou bien dans U ou bien dans V. On dispose du résultat fondamental suivant.

Théorème 6.28 (Théorème des petites chaînes). *L'inclusion $C_*^{U,V}(X; R) \to C_*(X; R)$ induit un isomorphisme en homologie.*

Le corollaire qui nous intéresse est le suivant.

Théorème 6.29 (Mayer-Vietoris). *On dispose d'une suite exacte longue*

$$\ldots \to H_i(U \cap V) \to H_i(U) \oplus H_i(V) \to H_i(X) \to H_{i-1}(U \cap V) \to \ldots \to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(X) \to 0$$

Preuve. Il suffit de remarquer qu'on dispose d'une suite exacte courte

$$0 \to C_*(U \cap V; R) \to C_*(U; R) \oplus C_*(V; R) \to C_*^{U,V}(X; R) \to 0$$

où le premier morphisme envoie une chaîne $\sigma : \Delta^n \to U \cap V$ sur la paire (σ, σ) et le deuxième morphisme envoie une paire (σ, τ) avec $\sigma : \Delta^n \to U$ et $\tau : \Delta^n \to V$ sur la différence $\sigma - \tau$. Le résultat découle alors de la Proposition 5.10 et du Théorème précédent. $\square$

Exemple 6.30. Soient X et Y deux espaces topologiques, alors pour tout i, on a un isomorphisme

$$H_i(X \sqcup Y) \cong H_i(X) \oplus H_i(Y)$$

En effet il suffit d'appliquer la suite exacte longue de Mayer Vietoris à l'espace topologique $X \sqcup Y$ recouvert par les deux ouverts X et Y.

Définition 6.31. Soit $f : A \to X$ une application continue. Le cône de f noté $C(f)$ est l'espace topologique définit par le carré cocartésien suivant.

$$\begin{tikzcd} A \times \{0\} \sqcup A \times \{1\} \arrow[r, "p \sqcup f"] \arrow[d] & pt \sqcup X \arrow[d] \\ A \times [0,1] \arrow[r] & C(f) \end{tikzcd}$$

Proposition 6.32. *Soit $f : A \to X$ une application continue. On dispose d'une suite exacte longue*

$$\ldots \to H_i(A) \xrightarrow{H_i(f)} H_i(X) \to H_i(C(f)) \to H_{i-1}(A) \to \ldots \to H_0(A) \to H_0(X) \oplus R \to H_0(C(f)) \to 0$$

Preuve. Il s'agit simplement d'une application de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris. On recouvre l'espace topologique $C(f)$ par deux ouverts. Le premier est l'ouverts $U = A \times [0, 1[$, le second est l'ouvert $V = X \cup A \times]0, 1]$. L'ouverts U est contractile alors que l'ouvert V est homotopiquement équivalent à X. L'intersection de ces deux ouverts est homéomorphe à $A \times]0, 1[$ et est donc homotopiquement équivalente à A. $\square$

Si l'application $f : A \to X$ est une inclusion, on peut comparer cette suite exacte longue à celle de la paire (X, A). On obtient la Proposition suivante.

Proposition 6.33. *On a un isomorphisme de R-module gradué $\tilde{H}_*(C(f); R) \cong H_*(X, A; R)$.*

En d'autres termes l'homologie de la paire (X, A) peut s'interpréter comme l'homologie (réduite) du cône de l'inclusion.

8. Homologie des sphères

THÉORÈME 6.34. *L'homologie de la sphère S^0 est donnée par*

$$H_0(S^0; R) = R \oplus R$$
$$H_i(S^0; R) = 0 \text{ si } i > 0$$

Si $d \geq 1$, l'homologie de la sphère S^d est donnée par

$$\begin{aligned} H_i(S^d; R) &= R \text{ si } i = 0, d \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

PREUVE. La preuve se fait par récurrence sur d. L'affirmation pour $d = 0$ est facile. Supposons le résultat vrai pour d. On prend comme modèle de la sphère S^{d+1}, l'ensemble des $(d+2)$-uplets $(x_0, \ldots, x_{d+1})$ tels que

$$x_0^2 + \ldots + x_{d+1}^2 = 1$$

On appelle pôle nord (resp. sud) de S^{d+1} le point $N = (0, \ldots, 0, 1)$ (resp. $S = (0, \ldots, 0, -1)$). On peut recouvrir la sphère par deux ouverts $U_N = S^{d+1} - N$ et $U_S = S^{d+1} - S$. On vérifie facilement que l'inclusion de l'équateur

$$S^d \subset S^{d+1} - \{S, N\}$$

est une équivalence d'homotopie. On peut donc appliquer la suite exacte longue de Mayer-Vietoris à ce recouvrement et on trouve , pour $i > 0$, un isomorphisme

$$H_{i+1}(S^{d+1}) \cong H_i(S^d)$$

On a par ailleurs une suite exacte

$$0 \to H_1(S^{d+1}) \to H_0(S^d) \to R \oplus R \to H_0(S^{d+1}) \to 0$$

Il faut alors faire une distinction de cas, si $d = 0$, alors le morphisme $H_0(S^0) \to R \oplus R$ envoie les deux générateurs de $H_0(S^0)$ sur la paire $(1, 1)$. On en déduit $H_1(S^1) = R$. Si $d > 0$, alors, le morphisme $H_0(S^d) \to R \oplus R$ est injectif et on en déduit que $H_1(S^{d+1}) = 0$. $\square$

Pour X un espace topologique, on note SX, l'espace obtenu en recollant deux copies de $C(\mathrm{id}_X)$ le long de X. On peut aussi voir SX comme le quotient de $X \times [-1, 1]$ par le relation d'équivalence qui identifie les points de la forme $(x, 1)$ entre eux et les points de la forme $(x, -1)$ entre eux. On vérifie facilement que $S(S^d) \cong S^{d+1}$. On a alors la Proposition suivante dont la preuve est une généralisation facile de celle pour les sphères.

PROPOSITION 6.35. *Soit X un espace topologique, alors $\tilde{H}_0(SX; R) = 0$ et pour $i \geq 0$, $\tilde{H}_{i+1}(SX; R) \cong \tilde{H}_i(X; R)$.*

COROLLAIRE 6.36. *Si $d \neq d'$, la sphère S^d n'est pas homotopiquement équivalente à la sphère $S^{d'}$.*

On peut déduire d'autres résultats intéressant de ce calcul. Voir la section suivante.

Si $d \geq 1$, le groupe $H_d(S^d)$ est non-canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}$. Cependant l'anneau $\mathrm{End}(H_d(S^d))$ est canoniquement identifié à $\mathbb{Z}$ en tant qu'anneau.

DÉFINITION 6.37. Soit $f : S^d \to S^d$ une application continue, on appelle degré de f l'homomorphisme

$$H_d(f; \mathbb{Z}) : H_d(S^d; \mathbb{Z}) \to H_d(S^d; \mathbb{Z})$$

vu comme un élément de $\mathbb{Z}$ par la remarque ci-dessus.

Le degré d'une application est de façon évidente invariant par homotopie. On peut donc voir le degré comme une application

$$\deg : [S^d, S^d] \to \mathbb{Z}$$

Il est par ailleurs facile de voir que cette application est un morphisme de monoïde lorsque $[S^d, S^d]$ est muni de la composition et $\mathbb{Z}$ est muni de la multiplication.

On a le résultat fondamental suivant.

Théorème 6.38. *Si $d \geq 1$. L'application degré*

$$\deg : [S^d, S^d] \to \mathbb{Z}$$

est un isomorphisme.

Preuve. On admettra l'injectivité de cette application. On peut montrer la surjectivité de façon assez simple par récurrence sur d. Pour $d = 1$, on laisse au lecteur le soin de vérifier que l'application $z \mapsto z^n$ est de degré n. Supposons avoir montré la surjectivité pour d. Soit $f : S^d \to S^d$ une application de degré n. On identifie S^{d+1} avec la suspension $S(S^d)$, l'application f induit donc une application $g : S^{d+1} \to S^{d+1}$. On peut considérer les deux ouverts U_N et U_S qui apparaissent dans la démonstration du Théorème 6.34. Ces deux ouverts sont stables par g, on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_{d+1}(S^{d+1}) \arrow[r] \arrow[d, "H_{d+1}(g)"'] & H_d(U_N \cap U_S) \arrow[d, "H_d(g)"] \\
H_{d+1}(S^{d+1}) \arrow[r] & H_d(U_N \cap U_S)
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont les morphismes connectant de la suite exacte longue de Mayer-Vietoris. On a vu dans la preuve du Théorème 6.34 que ces flèches sont des isomorphismes. Par ailleurs, en restreignant g à $S^d \subset U_N \cap U_S$, on a un autre diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_d(S^d) \arrow[r] \arrow[d, "H_d(f)"'] & H_d(U_N \cap U_S) \arrow[d, "H_d(g)"] \\
H_d(S^d) \arrow[r] & H_d(U_N \cap U_S)
\end{tikzcd}$$

où les deux flèches horizontales sont induites par l'inclusion évidente qui est une équivalence d'homotopie et sont donc des isomorphismes. On déduit de ces deux diagrammes que le degré de g est égal au degré de f. $\square$

On va maintenant essayer de généraliser ce calcul à un bouquet de sphères. Étant donné un ensemble S on peut considérer le bouquet $\bigvee_{s \in S} S^d$. On dispose pour chaque élément s de S d'une inclusion

$$i_s : S^d \to \bigvee_{s \in S} S^d$$

On obtient donc un morphisme

$$\bigoplus_{s \in S} H_d(i_s) : \bigoplus_{s \in S} H_d(S^d) \to H_d(\bigvee_{s \in S} S^d)$$

Théorème 6.39. *Ce morphisme est un isomorphisme. Tous les autres groupes d'homologie de $\bigvee_{s \in S} S^d$ sont nuls à part H_0 qui est isomorphe à R.*

Preuve. L'affirmation sur le H_0 est evidente. Le résultat est également évident lorsque $d = 0$ donc on supposera $d \geq 1$.

On va d'abord montrer le résultat pour S fini. On le fait par récurrence sur le nombre d'éléments de S. C'est évident lorsque S possède un unique élément. Supposons le résultat montré pour S un ensemble à n éléments et considérons $T = S \sqcup \{t\}$ un ensemble à $n+1$ éléments. Pour $j \in T$, on note x_j le point de la j-ème sphère diamétralement opposé au point base. On considère les deux ouverts $U = \bigvee_T S^d - x_t$ et $V = \bigvee_T S^d - \bigsqcup_{j \neq t} x_j$. Ces deux ouverts forment un recouvrement de $\bigvee_T S^d$. Par ailleurs, on vérifie facilement que $U \cap V$ est contractile et que les inclusions $S^d \to V$ et $\bigvee_{s \in S} S^d \to U$ sont des équivalences d'homotopie. La suite exacte longue de Mayer-Vietoris nous donne alors des isomorphismes

$$H_k(\bigvee_T S^d) \cong H_k(\bigvee_S S^d) \oplus H_k(S^d)$$

pour $k \geq 1$. On en déduit le résultat voulu sans difficultés.

Lorsque l'ensemble S est infini, le résultat découle de la Proposition 6.11. Il s'agit de vérifier que toute application continue $\Delta^k \to \bigvee_S S^d$ se factorise par un bouquet fini. $\square$

9. Applications de l'homologie des sphères

PROPOSITION 6.40. *Soit U un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 1$, soit u un point de U, alors il existe une injection $R \to H_{d-1}(U - u; R)$.*

PREUVE. Soit D un disque ouvert de $\mathbb{R}^d$ inclus dans U et centré en u. On peut considérer l'inclusion

$$\alpha : D - u \to U - u$$

On va montrer que l'application $H_{d-1}(\alpha) : k \cong H_{d-1}(D - u) \to H_{d-1}(U - u)$ est une injection scindée (c'est à dire qu'elle possède un inverse à gauche).

On construit une application continue $\beta : U - u \to S^{d-1}$ donnée par la formule

$$\phi(x) = \frac{x - u}{\|x - u\|}$$

On observe que la composée $\beta \circ \alpha$ est une équivalence d'homotopie. On en déduit l'équation

$$H_{d-1}(\beta \circ \alpha) = H_{d-1}(\beta) \circ H_{d-1}(\alpha)$$

ce qui implique que $H_{d-1}(\alpha)$ est une injection scindée. □

On en déduit le résultat suivant souvent nommé le théorème d'invariance du domaine.

COROLLAIRE 6.41. *Soit U un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^d$ et U' un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^{d'}$. Si il existe un homéomorphisme entre U et U' alors $d = d'$.*

PREUVE. Si $d = 0$ ou $d' = 0$, le résultat est trivial donc on peut supposer $d \neq 0$ et $d' \neq 0$. Sans perte de généralité, on peut aussi supposer $d \leq d'$. Soit ϕ un homéomorphisme entre U et U'. On peut choisir un disque ouvert dans U et restreindre ϕ à ce disque. On obtient alors un homéomorphisme qu'on note encore ϕ entre un disque D de $\mathbb{R}^d$ et un ouvert V de $\mathbb{R}^{d'}$. Soit c le centre de D. On peut restreindre ϕ à $D - c$ et on obtient un homéomorphisme

$$\phi : D - c \to V - \phi(c)$$

On en déduit que $H_{d'-1}(\phi)$ est un isomorphisme. En particulier, d'après la proposition précédente, $H_{d'-1}(D-c)$ n'est pas nul. Comme $D - c$ est homotopiquement équivalent à S^{d-1}, on en déduit qu'on est dans un des deux cas suivants

- $d' = 1$ et $d \neq d'$.
- $d = d'$.

Puisqu'on a supposé $d \leq d'$, le premier cas implique $d = 0$ qui est exclus par hypothèse. On a donc bien $d = d'$. □

PROPOSITION 6.42. *Soit $i : S^{n-1} \to D^n$ l'inclusion du bord du disque fermé. Il n'existe pas d'application*

$$g : D^n \to S^{n-1}$$

telle que la composée $g \circ i$ soit homotope à l'identité.

PREUVE. Soit r une telle application. Alors

$$H_{n-1}(g, \mathbb{Z}) \circ H_{n-1}(i, \mathbb{Z}) = H_{n-1}(\mathrm{id}, \mathbb{Z}) =$$

ce qui implique que l'identité du groupe abélien $H_{n-1}(S^{n-1}, \mathbb{Z})$ se factorise par zéro. □

THÉORÈME 6.43 (Brouwer). *Soit $f : D^n \to D^n$ une application continue. Alors f possède au moins un point fixe.*

PREUVE. On suppose que f ne possède pas de point fixe. On construit une application $g : D^n \to S^{n-1}$ qui envoie un point x sur le point d'intersection de la droite $(x, f(x))$ avec la sphère qui est le plus proche de x (faire un dessin pour se convaincre que cette application est bien définie). On vérifie que cette application est continue. Par ailleurs, si $x \in S^{n-1}$, on a $g(x) = x$. C'est absurde d'après la proposition précédente. □

10. Dualité d'Alexander

On commence par le lemme purement catégorique suivant.

LEMME 6.44. *Soit*

$$A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \dots$$

un diagramme dans la catégorie des groupes abéliens indexé par l'ensemble ordonné $\mathbb{N}$. Soit $x \in A_0$ tel que l'image de x dans chaque A_n est non-nulle. Alors, l'image de x dans la colimite des A_i est non-nulle.

PREUVE. On observe d'abord qu'une construction explicite de cette colimite est donnée par le conoyau de l'application

$$\oplus_i A_i \to \oplus_i A_i$$

qui envoie $(a_0, a_1, \dots)$ sur $(a_0, a_1 - f_0(a_0), a_2 - f_1(a_1), \dots)$. Par ailleurs, par cette identification, l'application $A_0 \to \operatorname{colim}_n A_n$ est simplement l'application

$$x \mapsto (x, 0, 0, \dots)$$

Dire que x s'envoie sur 0 dans cette colimite revient donc à dire qu'on a une égalité de la forme

$$(x, 0, 0, 0, \dots) = (a_0, a_1 - f_0(a_0), a_2 - f_1(a_1), \dots)$$

la condition qu'on a mis sur x impliquerait alors que tous les a_i sont non nuls. Dans ce cas, la suite $(a_o, a_1, \dots)$ ne vit pas dans la somme directe. $\square$

On note D^k le disque unité fermé de dimension k.

PROPOSITION 6.45. *Soit $f : D^k \to S^d$ une application continue injective, alors on a un isomorphisme $H_*(S^d - f(D^k)) \cong H_*(pt)$.*

PREUVE. Il est commode dans cette preuve de travailler aver $[0,1]^k$ au lieu de D^k, les deux espaces étant homéomorphes, cela ne pose pas de problèmes. On procède par récurrence sur k. Pour $k = 0$ c'est évident car S^d privée d'un point est homéomorphe à $\mathbb{R}^d$. Supposons le théorème prouvé pour $k - 1$. Pour I un sous-intervalle fermé de $[0,1]$, on note $U_I = S^d - f([0,1]^{k-1} \times I)$. On souhaite montrer que $U_{[0,1]}$ a l'homologie du point. On suppose le contraire, on a donc une classe d'homologie non-nulle $x \in H_i(U_{[0,1]})$ avec $k > 0$. On peut voir l'espace $U_{[0,1]}$ comme l'intersection de $U_{[0,1/2]}$ et $U_{[1/2,1]}$. La réunion de ces deux espaces est $U_{\{1/2\}}$ qui a une homologie triviale par l'hypothèse de récurrence. La suite exacte de Mayer-Vietoris implique donc que l'application évidente

$$H_i(U_{[0,1]}) \to H_i(U_{[0,1/2]}) \oplus H_i(U_{[1/2,1]})$$

est un isomorphisme. La classe x doit donc s'envoyer sur une classe non-nulle dans l'un des deux facteurs. En réitérant ce raisonnement, on trouve une suite décroissante d'intervalles fermés

$$[0,1] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

avec I_n de longueur $1/2^n$. Par ailleurs, pour chaque n, on a une classe non-nulle x_n dans $H_i(U_{I_n})$ enfin l'inclusion $U_{I_n} \to U_{I_{n+1}}$ envoie x_n sur x_{n+1}. En utilisant la Proposition 6.11, on trouve un isomorphisme

$$\operatorname{colim}_n H_i(U_{I_n}) \cong H_i(\cup_n U_{I_n})$$

L'espace $\cup_n U_{I_n}$ a l'homologie du point par notre hypothèse de récurrence. D'un autre côté, par le lemme précédent la suite de classe d'homologies x_n fournit un élément non-nul dans $\operatorname{colim}_n H_i(U_{I_n})$. On a donc une contradiction. $\square$

THÉORÈME 6.46. *Soit $f : S^k \to S^d$ une application continue injective. Alors on a un isomorphisme $H_i(S^d - f(S^k)) \cong H_i(S^{d-k-1})$*

PREUVE. Pour simplifier les notations on n'écrira pas f ainsi $S^d - f(S^k)$ sera noté $S^d - S^k$. On procède par récurrence sur k. C'est facile lorsque $k = 0$. Supposons le résultat vrai pour k. On note D_N et D_S les deux hémisphères de S^{k+1}. On peut donc recouvrir $S^d - S^k$ par les deux ouverts $S^d - D_N$ et $S^d - D_S$. L'intersection de ces deux ouverts est $S^d - S^{k+1}$. On a donc une suite exacte longue de Mayer-Vietoris

$$\dots \to H_{i+1}(S^d - S^{k+1}) \to H_{i+1}(S^d - H_N) \oplus H_{i+1}(S^d - H_S) \to H_{i+1}(S^d - S^k) \to H_i(S^d - S^{k+1}) \to \dots$$

Par la proposition précédente, et l'hypothèse de récurrence on trouve donc un isomorphisme

$$H_{i+1}(S^{d-k-1}) \cong H_i(S^d - S^{k+1})$$

valable lorsque $i > 0$. Cela implique donc le résultat voulu pour $i > 0$. Pour calculer H_0, la suite exacte de Mayer-Vietoris et l'hypothèse de récurrence nous donne une suite exacte

$$0 \to H_1(S^{d-k-1}) \to H_0(S^d - S^{k+1}) \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H_0(S^{d-k-1}) \to 0$$

qui implique bien le résultat voulu. □

Le théorème de Jordan qui affirme qu'une application continue injective $S^1 \to \mathbb{R}^2$ divise le plan en deux composantes connexes par arcs est un cas particulier du corollaire suivant.

Corollaire 6.47. *Soit $f : S^{d-1} \to S^d$ une application continue injective. Alors $S^d - f(S^{d-1})$ a deux composantes connexes par arcs.*

11. Produit cartésien de classes d'homologie

Dans cette section R est un anneau commutatif et on utilise le symbole $\otimes$ pour le produit tensoriel au-dessus de R. Pour X un espace topologique, notons $S_\bullet(X)$ le R-module simplicial $R\langle \mathrm{Sing}(X)\rangle$. Si X et Y sont deux espaces topologiques, on constate qu'on a un isomorphisme

$$S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(Y) \cong S_\bullet(X \times Y)$$

qui est naturel en X et Y. En appliquant le foncteur $C_* : s\mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Ch}_*(R)$ et en précomposant avec la transformation d'Eilenberg-Zilber, on trouve un morphisme de complexe de chaînes

$$C_*(X;R) \otimes C_*(Y;R) \xrightarrow{EZ} C_*(S_\bullet(X) \otimes S_\bullet(Y)) \cong C_*(X \times Y; R)$$

Étant donné $a \in C_i(X;R)$ et $b \in C_j(Y;R)$ on note $a \times b$ leur image dans $C_{i+j}(X \times Y; R)$. Cette opération s'appelle le produit cartésien des chaînes singulières.

Par ailleurs, on rappelle, qu'on a construit dans la section 5, une transformation naturelle

$$\bigoplus_{i+j=n} H_i(C) \otimes H_j(D) \to H_n(C \otimes D)$$

pour toute paire de complexes de chaînes C et D. En particulier, on peut appliquer cette transformation à $C = C_*(X;R)$ et $D = C_*(Y;R)$ et on trouve un morphisme

$$\bigoplus_{i+j=n} H_i(X;R) \otimes H_j(Y;R) \to H_n(C_*(X;R) \otimes C_*(Y;R)) \xrightarrow{H_n(\times)} H_n(X \times Y; R)$$

où le morphisme $\times$ est défini ci-dessus. On note également ce morphisme $\times$ et on l'appelle le produit cartésien des classes d'homologie. Concrètement, si $a \in H_i(X;R)$ et $b \in H_j(Y;R)$, on peut choisir des cycles $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ qui les représentent et $a \times b$ est la classe de $\tilde{a} \times \tilde{b}$.

Proposition 6.48. *Le produit cartésien des classes d'homologie satisfait les propriétés suivantes.*

- *Si $f : X \to X'$ et $g : Y \to Y'$ sont des applications continues et si $a \in H_i(X;R)$ et $b \in H_j(Y;R)$, alors, on a*
$$H_{i+j}(f \times g)(a \times b) = (H_i(f)(a)) \times (H_j(g)(b)).$$
- *Soient X, Y et Z trois espaces topologiques et $a \in H_i(X;R)$, $b \in H_j(Y;R)$ et $c \in H_k(Z;R)$, alors*
$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$
- *Soient X, Y deux espaces topologiques et $a \in H_i(X;R)$ et $b \in H_j(Y;R)$, alors*
$$(a \times b) = (-1)^{ij}(b \times a).$$

Preuve. La première propriété est juste une traduction du fait que le produit cartésien est une transformation naturelle. Les deux autres découlent de propriétés analogue de la transformation d'Eilenberg-Zilber (voir les Propositions 5.30 et 5.32). □

CHAPITRE 7

CW-complexes et homologie cellulaire

1. CW-complexes

Définition 7.1. Une inclusion continue d'espace topologiques $i : X \to Y$ est un recollement de cellules de dimension $n+1$ s'il existe un carré cocartésien d'espaces topologiques

$$\begin{tikzcd} \sqcup_{i\in I} S^n \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "i"] \\ \sqcup_{i\in I} D^{n+1} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

dans lequel I est un ensemble quelconque et l'application verticale de gauche est l'inclusion évidente.

On peut alors définir inductivement la notion de CW-complexe.

Définition 7.2. Un CW-complexe de dimension 0 est une union disjointe de points. Un CW-complexe de dimension $n+1$ est un espace topologique qui peut s'obtenir à partir d'un CW-complexe de dimension n par recollement de cellules de dimension $n+1$. Enfin un CW-complexe est un espace topologique X qui peut s'écrire comme une colimite

$$X = \operatorname{colim}_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

où pour tout n, X_n est un CW-complexe de dimension n et l'application $X_n \to X_{n+1}$ est un recollement de cellules de dimension $n+1$

Remarque 7.3. Il faut penser un CW-complexe comme la donnée de l'espace X mais aussi la donnée de la filtration

$$X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X$$

et enfin la donnée des application d'attachement de cellules

$$\sqcup_{i\in I} S^n \to X_n$$

Définition 7.4. Étant donné un CW-complexe X, on appelle n-squelette de X l'espace X_n.

On aura besoin du résultat de topologie suivant.

Proposition 7.5. *Soit X un CW-complexe et $X_0 \subset X_1 \subset \ldots$ sa fitlration par les squelettes. Soit K un compact de X, alors K est inclus dans X_n pour un certain n.*

Preuve. Supposons que ce n'est pas le cas. On peut alors trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in K \cap X_n$ et $x_n \notin X_{n-1}$. Par définition de la topologie d'une colimite, un sous-ensemble de X est fermé si et seulement si son intersection avec chaque X_n est un fermé. Puisque les espaces X_n et X sont séparés (à vérifier en exercice), on en déduit que les ensembles $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ sont des fermés. En posant $U_n = K - F_n$ on obtient une suite croissante d'ouverts de K dont la réunion est K. Par compacité de K, $K = U_n$ pour un certain n, mais c'est absurde puisque $x_{n+1} \notin U_n$. $\square$

Exemple 7.6. Il existe deux CW-structures classiques sur la sphère de dimension n. La première est obtenue en recollant une cellule de dimension n sur un point (il existe une unique façon de le faire). La seconde est inductive. La sphère S^0 est un CW-complexe de dimension 0. Supposons avoir construit une structure de

CW-complexe sur S^{n-1}. Alors, on peut construire S^n en recollant deux cellules de dimension n de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \sqcup S^{n-1} \arrow[r, "\mathrm{id}\sqcup\mathrm{id}"] \arrow[d] & S^{n-1} \arrow[d] \\ D^n \sqcup D^n \arrow[r] & S^n \end{tikzcd}$$

Exemple 7.7. Notons $\mathbb{RP}^n$ l'espace projectif réel de dimension n. On a un plongement j de $\mathbb{RP}^{n-1}$ dans $\mathbb{RP}^n$ donné par

$$[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \mapsto [x_0 : x_1 : \ldots : x_n : 0]$$

On peut alors considérer le carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "q"] \arrow[d] & \mathbb{RP}^{n-1} \arrow[d, "j"] \\ D^n \arrow[r] & \mathbb{RP}^n \end{tikzcd}$$

où q est l'application quotient venant de l'identification $\mathbb{RP}^{n-1} \cong S^{n-1}/(\mathbb{Z}/(2)$. On vérifie que c'est un carré cocartésien. On a donc construit inductivement une structure de CW-complexe sur $\mathbb{RP}^n$ avec une cellule de dimension k pour chaque k entre 0 et n.

Exemple 7.8. On peut définir une structure de CW-complexe analogue sur l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$. On observe en effet qu'on a un carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[r, "q"] \arrow[d] & \mathbb{CP}^{n-1} \arrow[d] \\ D^{2n} \arrow[r] & \mathbb{CP}^n \end{tikzcd}$$

Pour définir l'application q, on identifie S^{2n-1} avec les n-uplets de nombres complexes $(z_1, \ldots, z_n)$ tels que

$$|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1$$

Le groupe S^1 des nombres complexes de module 1 agit alors sur S^{2n-1} en multipliant chaque coordonnée. On peut alors décrire $\mathbb{CP}^n$ comme le quotient S^{2n-1}/S^1. L'application q est l'application quotient.

Le carré cocartésient ci-dessus permet de définir par récurrence une structure de CW-complexe sur $\mathbb{CP}^n$ avec une cellule de dimension k pour chaque k pair entre 0 et $2n$.

Exemple 7.9. Soit M une variété différentiable de dimension n. Alors M admet une structure de CW-complexe de dimension n. Ce résultat est non-trivial. Une façon de le prouver est de montrer que M admet une tringulation (c'est à dire qu'on peut contruire M à partir de n-simplexes recollés entre eux le long de leurs faces). Ensuite on observe que cette triangulation fournit la CW-structure. Le k-squelette est l'union des faces de dimensions k des simplexes qui apparaissent dans la triangulation.

Définition 7.10. Un morphisme cellulaire entre deux CW-complexes X et Y est une application continue $f : X \to Y$ qui préserve la filtration par les squelettes.

2. Bonnes paires et excision

Définition 7.11. Soit (X, A) une paire d'espace topologique avec A fermé dans X. On dit que la paire (X, A) est une bonne paire si il existe

- Un ouvert U de X avec $A \subset U$.
- Une application $r : U \to A$ telle que $r_{|A} = \mathrm{id}_A$.
- Une homotopie $h : U \times I \to U$ entre r et id_U telle que $h(a, t) = a$ pour tout $a \in A$ et $t \in I$.

Exemple 7.12. Soit X une variété topologique, alors pour tout point x de X, la paire (X, x) est une bonne paire. La paire (D^n, S^{n-1}) est une bonne paire.

Proposition 7.13. *On les propriétés suivantes*

(1) *Si* $(X_i, A_i)_{i\in I}$ *est une famille de bonnes paires indexée par un ensemble* I. *alors* $(\sqcup_{i\in I} X_i, \sqcup_{i\in I} A_i)$ *est une bonne paire.*
(2) *Soit* (X, A) *une bonne paire. Soit* $i : A \to X$ *l'inclusion et* $f : A \to B$ *n'importe quelle application continue, alors l'inclusion* $j : B \to Y$ *donnée par le carré cocartésien suivant*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "j"'] & Y \end{tikzcd}$$

fait de la paire (Y, B) *une bonne paire.*
(3) *Si* (X, A) *est une bonne paire et* Y *est un espace quelconque, alors* $(X \times Y, A \times Y)$ *est une bonne paire.*

Preuve. La première propriété est facile et laissée au lecteur. Pour la seconde propriété, on a par définition U un ouvert de X contenant A, $r : U \to A$ une rétraction et $h : U \times I \to U$ une homotopie entre r et id_U qui est l'identité sur A. On considère alors l'ouvert V de Y défini par le carré cocartésien suivant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & U \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

(on vérifie que c'est bien un ouvert pour la topologie de la colimite et que l'application induite $U \to V$ est bien la restriction de g). On a alors une rétraction $s : U \to B$ donnée par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & U \arrow[r, "r"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & V \arrow[r, "s"'] & B \end{tikzcd}$$

dans lequel les deux carrés sont cocartésiens (on vérifie alors que la composée $B \to V \to B$ est bien l'identité). Enfin, on doit construire une homotopie $h' : V \times I \to V$ entre s et l'identité de V. Pour cela, on considère le carré cocartésien suivant

$$\begin{tikzcd} A \times I \arrow[r] \arrow[d] & U \times I \arrow[d] \\ B \times I \arrow[r] & V \times I \end{tikzcd}$$

obtenu en prenant le produit avec I du carré cocartésien ci-dessus (on vérifie sans peine que c'est bien un carré cocartésien). Par propriété universelle de la colimite, se donner une application continue de $V \times I$ vers V, c'est la même chose que se donner une application continue de $B \times I$ vers V et une application continue de $U \times I$ vers V telle que les deux applications induites de $A \times I$ vers V coïncident. On construit notre h' à partir de la composée $U \times I \xrightarrow{h} U \to V$ et de la composée $B \times I \xrightarrow{p_1} B \to V$ où p_1 est la projection sur le premier facteur. Il est alors facile de vérifier que notre h' a les propriétés requises.

Enfin pour la dernière propriété, on pose $V = U \times Y$ qui est bien un ouvert de $X \times Y$ contenant $A \times Y$. On construit une homotopie $h : V \times I \to V$ comme le produit de $h : U \times I \to U$ avec l'identité de Y. Cette homotopie satisfait bien les conditions requises. $\square$

Corollaire 7.14. *Soit* X *un CW-complexe. Alors l'inclusion* $X_{n-1} \to X_n$ *du* $(n-1)$*-squelette dans le* n*-squelette est une bonne paire.*

Preuve. En effet, on a un carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} \sqcup_I S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[d] \\ \sqcup_I D^n \arrow[r] & X_n \end{tikzcd}$$

L'inclusion verticale de gauche est une bonne paire par la première partie de la proposition précédente. L'inclusion de doite est alors également une bonne paire par la deuxième partie de la proposition précédente. □

Notre but va maintenant être de montrer que l'homologie relative d'une bonne paire (X, A) coïncide avec l'homologie du quotient X/A. On va utiliser pour cela la proposition suivante qu'on appelle le Théorème d'excision. On renvoie le lecteur à la section 5 du chapitre précédent pour les définitions et propriétés élémentaires de l'homologie des paires.

Proposition 7.15 (Théorème d'excision). *Soit X un espace topologique et A un sous-espace. Soit $F \subset A$ un sous-espace de A tel que l'adhérence de F dans X soit contenue dans l'intérieur de A. Alors, pour tout anneau R de coefficients, l'application de paires $(X - F, A - F) \to (X, A)$ induit un isomorphisme en homologie relative*

$$H_*(X - F, A - F; R) \to H_*(X, A; R)$$

Preuve. On laisse tomber l'anneau des coefficients de la notation. On considère le diagramme commutatif suivant dans la catégorie des complexes de chaînes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_*(A - F) \arrow[r] \arrow[d] & C_*(X - F) \arrow[r] \arrow[d] & C_*(X - F, A - F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_*(A) \arrow[r] \arrow[d] & C_*^{A,X-F}(X) \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_*(A) \arrow[r] & C_*(X) \arrow[r] & C_*(X, A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme toutes les lignes sont des suites exactes. Le complexe $C_*^{A,X-F}(X)$ est le complexe des petites chaînes qui apparaît dans le Théorème 6.28. Le complexe Q est par définition le quotient $C_*^{A,X-F}(X)/C_*(A)$. Les morphismes verticaux sont les morphismes évidents. On constate facilement que le morphisme $C_*(X-F, A-F) \to Q$ est un isomorphisme. Par ailleurs, la proposition 5.12 et le théorème des petites chaînes (Théorème 6.28) impliquent que le morphisme $Q \to C_*(X, A)$ induit un isomorphisme en homologie. Enfin la composée

$$C_*(X - F, A - F) \to Q \to C_*(X, A)$$

est bien le morphisme induit par l'inclusion $(X - F, A - F) \to (X, A)$.

□

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème qui nous intéresse.

Théorème 7.16. *Soit (X, A) une bonne paire. Notons p l'image de A dans le quotient X/A. Alors l'application évidente de paires*

$$(X, A) \to (X/A, p)$$

induit un isomorphisme

$$H_*(X, A; R) \cong \tilde{H}_*(X/A; R)$$

Preuve. Rappelons déjà pour clarifier l'énoncé que pour un espace pointé (Y, y), on a toujours isomorphisme $H_*(Y, y; R) \cong \tilde{H}_*(Y; R)$ (Proposition 6.27). Considérons alors le diagramme commutatif de paires

$$\begin{tikzcd} (X, A) \arrow[r] \arrow[d] & (X, U) \arrow[d] \\ (X/A, p) \arrow[r] & (X/A, U/A) \end{tikzcd}$$

où U est l'ouvert donné par la définition d'une bonne paire. Si on applique le foncteur homologie à ce diagramme, on obtient un diagramme commutatif de R-modules.

$$\begin{tikzcd} H_*(X, A) \arrow[r] \arrow[d] & H_*(X, U) \arrow[d] \\ H_*(X/A, p) \arrow[r] & H_*(X/A, U/A) \end{tikzcd}$$

où on a laissé tomber l'anneau des coefficients pour simplifier les notations. Dans ce diagramme, on souhaite montrer que le morphisme vertical de gauche est un isomorphisme. Il suffit de montrer que les trois autres morphismes sont des isomorphismes. Le morphisme horizontal du haut est un isomorphisme. En effet, par définition A est un rétracte par déformation de U. Le résultat se déduit donc de la Proposition 5.12. Le morphisme horizontal du bas est un isomorphisme pour la même raison car l'inclusion $A/A = p \to U/A$ est également un rétracte par déformation. Il suffit donc de montrer que le morphisme $H_*(X, U) \to H_*(X/A, U/A)$ est un isomorphisme. On considère alors le diagramme commutatif de paires

$$\begin{tikzcd} (X - A, U - A) \arrow[r] \arrow[d] & (X, U) \arrow[d] \\ (X/A - p, U/A - p) \arrow[r] & (X/A, , U/A) \end{tikzcd}$$

auquel on applique le foncteur homologie. On obtient alors un diagramme commutatif de R-modules.

$$\begin{tikzcd} H_*(X - A, U - A) \arrow[r] \arrow[d] & H_*(X, U) \arrow[d] \\ H_*(X/A - p, U/A - p) \arrow[r] & H_*(X/A, , U/A) \end{tikzcd}$$

Une fois encore, le morphisme qui nous intéresse est celui de droite. On va monter que les trois autres sont des isomorphismes. Le morphisme de gauche est un isomorphisme car il est induit par un isomorphisme de paires. Les deux morphismes horizontaux sont des isomorphismes par le théorème d'excision ce qui conclut la preuve. □

3. Le complexe des chaînes cellulaires

On va maintenant pouvoir associer à un CW-complexe X un complexe de chaînes.

Construction 7.17. Soit X un CW-complexe. Soit $X_0 \subset X_1 \subset \dots$ sa filtration par les squelettes. Par convention on définit X_{-1} comme étant l'espace vide. Le complexe des chaînes cellulaires sur X est le complexe $C_*^{cell}(X)$ défini de la façon suivante

$$C_n^{cell}(X; R) = H_n(X_n, X_{n-1}; R), n \geq 0$$

La différentielle $d_n^{cell} : C_n^{cell}(X; R) \to C_{n-1}^{cell}(X; R)$ est la composée suivante

$$H_n(X_n, X_{n-1}) \to H_{n-1}(X_{n-1}) \to H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$$

où le premier morphisme est le morphisme connectant dans la suite exacte longue de la paire (X_n, X_{n-1}) et le second est induit par l'application canonique de $(X_{n-1}, \varnothing)$ vers (X_{n-1}, X_{n-2}). Pour vérifier que cela définit bien une différentielle, on observe que la composée $d_{n-1}^{cell} \circ d_n^{cell}$ est la composée suivante

$$H_n(X_n, X_{n-1}) \to H_{n-1}(X_{n-1}) \to H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \to H_{n-2}(X_{n-2}) \to H_{n-2}(X_{n-2}, X_{n-3})$$

où les deux morphismes du milieu sont deux morphismes successifs de la suite exacte longue de la paire (X_{n-1}, X_{n-1}). Leur composée est donc nulle et par conséquent $d_n^{cell} \circ d_{n-1}^{cell} = 0$.

On peut également vérifier que l'association $X \mapsto C_*^{cell}(X; R)$ définit un foncteur de la catégorie des CW-complexes vers celle des complexes de chaînes sur R.

Définition 7.18. On appelle homologie cellulaire l'homologie du complexes des chaînes cellulaires. Il s'agit d'un foncteur de la catégorie des CW-complexes dans celles des R-modules gradués.

On va maintenant comparer l'homologie cellulaire à l'homologie singulière. On commence par quelques résultats préliminaires.

Proposition 7.19. *Soit X un CW-complexe, soit $X_0 \subset X_1 \subset \dots$ sa filtration par les squelettes. Alors le morphisme canonique*

$$\operatorname{colim}_n H_*(X_n) \to H_*(X)$$

est un isomorphisme.

Preuve. On utilise la Proposition 6.11. Il s'agit de montrer que pour tout k, une application continue de Δ^k dans X se factorise par X_n pour n assez grand. Puisque Δ^k est un espace compact, cela résulte de la Proposition 7.5. □

Proposition 7.20. *Soit X un CW-complexe. Soit I l'ensemble de ses cellules de dimensions n, alors on a*

$$H_n(X_n, X_{n-1}) \cong R^{\oplus I}$$

et

$$H_i(X_n, X_{n-1}) \cong 0$$

si $i \neq n$.

Preuve. Par le travail de la section précédente (Corollaire 7.14 et Théorème 7.16), on a un isomorphisme

$$H_*(X_n, X_{n-1}; R) \cong \tilde{H}_*(X_n/X_{n-1}; R) \cong \tilde{H}_*(\bigvee_I S^n; R)$$

òu l'ensemble I est l'ensemble des n-cellules de X. Par le Théorème 6.39, on sait que $\tilde{H}_*(\bigvee_I S^n; R)$ est nul en tout degré à part en degré n où il est isomorphe à $\bigoplus_I R$. □

Proposition 7.21. *Soit X un CW-complexe.*

- *On a un isomorphisme $H_i(X_n) \cong 0$ si $i > n$.*
- *Si $n \leq m$, l'inclusion $X_n \to X_m$ induit un isomorphisme $H_i(X_n) \cong H_i(X_m)$ pour $i < n$.*
- *L'inclusion $X_n \to X$ induit un isomorphisme $H_i(X_n) \cong H_i(X)$ pour $i < n$.*

Preuve. Le premier isomorphisme se montre par récurrence sur n. C'est évident quand $n = 0$. Si c'est vrai pour n, on peut considérer la suite exacte

$$H_i(X_n) \to H_i(X_{n+1}) \to H_i(X_{n+1}, X_n)$$

qui implique le résultat pour $n+1$ en utilisant la proposition précédente.

Le second isomorphisme se montre par récurrence sur m. C'est évident si $m = n$. Supposons l'isomorphisme vérifié pour m. On a une suite exacte

$$H_{i+1}(X_{m+1}, X_m) \to H_i(X_m) \to H_i(X_{m+1}) \to H_i(X_{m+1}, X_m)$$

dans laquelle les deux termes extrêmes sont nuls d'après la proposition précédente. On a donc une factorisation

$$H_i(X_n) \to H_i(X_m) \to H_i(X_{m+1})$$

dans laquelle les deux morphismes sont des isomorphismes.

Le troisième isomorphisme résulte du second en utilisant la Proposition 7.19. □

On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 7.22. *Soit X un CW-complexe, alors il existe un isomorphisme naturel*

$$H_*^{cell}(X) \cong H_*(X)$$

PREUVE. On commence par le montrer pour le groupe H_0. La proposition précédente nous assure que $H_0(X_1) \cong H_0(X)$. D'un autre côté, puisqu'on a les égalités $C_0^{cell}(X) = H_0(X_0)$ et $C_1^{cell}(X) = H_1(X_1, X_0)$ et par définition de d_1^{cell}. On obtient une suite exacte

$$H_1(X_1, X_0) \to H_0(X_0) \to H_0^{cell}(X) \to 0$$

où le premier morphisme est le connectant de la paire (X_0, X_1). En comparant cette suite exacte à la suite exacte de la paire (X_0, X_1) et en utilisant que $H_0(X_1, X_0) = 0$, on trouve un isomorphisme

$$H_0^{cell}(X) \cong H_0(X_1) \cong H_0(X)$$

Supposons maintenant $n \geq 1$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_n(X_n) \arrow[r] & H_n(X_n, X_{n-1}) \arrow[r] \arrow[dr, "d_n^{cell}"'] & H_{n-1}(X_{n-1}) \arrow[d] \\ & & & H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) \end{tikzcd}$$

La partie horizontale est exacte car c'est un morceau de la suite exacte de la paire (X_n, X_{n-1}) (noter que $H_n(X_{n-1}) = 0$). La flèche verticale est injective car $H_{n-1}(X_{n-2}) = 0$. Par injectivité de la flèche verticale, une classe de $C_n^{cell}(X) = H_n(X_n, X_{n-1})$ est un cycle si et seulement si son image dans $H_{n-1}(X_{n-1})$ est nulle. On en déduit donc un isomorphisme $Z_n^{cell} \cong H_n(X_n)$.

Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{tikzcd} H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \arrow[r] \arrow[dr, "d_{n+1}^{cell}"'] & H_n(X_n) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(X_{n+1}) \\ & H_n(X_n, X_{n-1}) & \end{tikzcd}$$

La partie horizontale est la suite exacte de la paire (X_{n+1}, X_n). On en déduit qu'un élément de $Z_n^{cell} \cong H_n(X_n)$ est un bord si et seulement si il est dans l'image de

$$H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \to H_n(X_n)$$

On a donc une suite exacte

$$H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \to H_n(X_n) \to H_n^{cell}(X) \to 0$$

On a également une suite exacte pour la paire (X_{n+1}, X_n) de la forme :

$$H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \to H_n(X_n) \to H_n(X_{n+1}) \to 0 \cong H_n(X_{n+1}, X_n)$$

Par comparaison, ces deux suite exactes nous donnent un isomorphisme

$$H_n^{cell}(X) \cong H_n(X_{n+1})$$

□

Grâce à ce théorème on peut faire certains calculs d'homologie.

PROPOSITION 7.23. *L'homologie de $\mathbb{CP}^n$ est la suivante*

$$H_i(\mathbb{CP}^n; R) = R \text{ si } i \in \{0, 2, \ldots, 2n\}$$
$$H_i(\mathbb{CP}^n; R) = 0 \text{ sinon}$$

PREUVE. On utilise la structure cellulaire de 7.8. Le complexe C_*^{cell} est non-nul de degré pair et inférieur ou égal à $2n$. La différentielle est alors nécéssairement triviale et le calcul d'homologie est trivial. □

Notons pour finir que la différentielle du complexe des chaînes cellulaires a une description très géométrique.

PROPOSITION 7.24. *Soit X un CW-complexe. Soit $n \geq 2$. Notons $f : \sqcup_I S^{n-1} \to X_{n-1}$ l'application d'attachement des n-cellules et $\overline{f}$ la composée de f avec l'application quotient $X_{n-1} \to X_{n-1}/X_{n-2}$. Alors la différentielle*

$$d^{cell} : \tilde{H}_n(X_n/X_{n-1}) \to \tilde{H}_{n-1}(X_{n-1}/X_{n-2})$$

s'identifie au morphisme $H_{n-1}(\overline{f})$.

PREUVE. Avant de prouver ce résultat, il faut le préciser un peu. La source de d^{cell} et celle de $H_{n-1}(\overline{f})$ sont isomorphes et c'est vus à travers cet isomorphisme que les deux morphismes coïncident. La preuve ci-dessous donne des précisions.

Notons $f : (\sqcup_I D^n, \sqcup_I S^{n-1}) \to (X_n, X_{n-1})$ l'application d'inclusion des n-cellules. Cette notation n'est pas abusive car la restriction de f au second facteur est bien l'application d'attachement des n-cellules. Considérons alors le diagramme commutatif suiavnt.

$$\begin{tikzcd}
\oplus_I H_n(D^n, S^{n-1}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & \oplus_I H_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[d, "H_{n-1}(f)"] \\
H_n(X_n, X_{n-1}) \arrow[r, "c"'] & H_{n-1}(X_{n-1}) \arrow[d, "H_{n-1}(q)"] \\
 & H_{n-1}(X_{n-1}/X_{n-2})
\end{tikzcd}$$

Les morphismes horizontaux sont les morphismes connectants pour les paires $(\sqcup_I D^n, \sqcup_I S^{n-1})$ et (X_n, X_{n-1}). Les deux morphismes verticaux du carré sont induits par f. Ce diagramme nous donne donc un isomorphisme entre $H_n(X_n, X_{n-1})$ et $\oplus_I H_{n-1}(S^{n-1})$. Par ailleurs, la différentielle du complexe des chaînes cellulaire qui est la composée $\tilde{H}_{n-1}(q) \circ c$ dans le diagramme ci-dessus s'identifie bien par le diagramme à la composée $H_{n-1}(q) \circ H_{n-1}(f) = H_{n-1}(\overline{f})$. □

REMARQUE 7.25. On peut aussi décrire explicitement la différentielle

$$d_1^{cell} : H_1(X_1, X_0) \to H_0(X_0)$$

On a une suite d'isomorphismes $H_1(X_1, X_0) \cong H_1(X_1/X_0) = H_1(\bigvee_I S^1) \cong R^{\oplus I}$ où I désigne l'ensemble des 1-cellules de X, Par ailleurs, puisque X_0 est un espace discret, on a $H_0(X_0) \cong R\langle X_0 \rangle$. Pour $i \in I$, notons $f_i : S^0 \to X_0$ l'application d'attachement de la cellule correspondante, alors d_1^{cell} envoie le générateur de $H_1(X_1, X_0)$ correspondant à i sur la différence $f_i(n) - f_i(s)$ dans $R\langle X_0 \rangle$ (où n et s désignent les deux points de S^0).

L'identification entre homologie cellulaire et homologie singulière nous donne aussi des résultats qualitatifs.

PROPOSITION 7.26. *Soit X un CW-complexe de dimension n alors $H_i(X) = 0$ si $i > n$.*

PREUVE. En effet, $H_i(X) \cong H_i^{cell}(X)$ et $C_i^{cell}(X)$ est nul en degré strictement supérieur à n. □

PROPOSITION 7.27. *Soit X un CW-complexe de type fini (c'est à dire ne possédant qu'un nombre fini de cellules en chaque dimension). Alors les groupes abéliens $H_i(X, \mathbb{Z})$ sont de type fini. De même si K est un corps les espaces vectoriels $H_i(X, K)$ sont de dimension finie.*

PREUVE. En effet, pour $R = \mathbb{Z}$ or $R = K$ un corps, les modules $H_i^{cell}(X; R)$ sont des sous-quotients de $C_i^{cell}(X; R)$ qui est de type fini. □

COROLLAIRE 7.28. *Soit M une variété différentiable de dimension n. Alors $H_i(M) = 0$ pour $i > n$*

PREUVE. En effet, une variété différentiable de dimension n admet toujours une triangulation qui est une CW-structure dont les cellules sont toutes de dimension $\leq n$. □

4. Unicité de l'homologie

Pour un foncteur F de la catégorie **Top** vers la catégorie $\mathbf{Ch}_*(R)$, on note $X \mapsto H_*^F(X)$ les groupes d'homologies de $F(X)$. On va introduire des axiomes sur F.

(H1) F est un foncteur homotopiquement invariant, c'est à dire que si f et g sont deux applications continues homotopes de X vers Y, alors $H_*^F(f) = H_*^F(g)$.

(H2) Soit $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille quelconque d'espaces. Alors, le morphisme évident

$$\oplus_{i\in I} H_*^F(X_i) \to H_*^F(\sqcup_{i\in I} X_i)$$

est un isomorphisme.

(H3) Soit X un espace topologique et $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille croissante de sous-espaces telle que tout sous-espace compact $K \subset X$ soit contenu dans A_n pour un certain n. Alors l'application

$$\operatorname{colim}_n H_*^F(A_n) \to H_*^F(X)$$

est un isomorphisme.

(H4) Si $A \to X$ est une injection, alors le morphisme induit $F(A) \to F(X)$ est une injection.

Avant d'introduire le dernier axiome qui est aussi le plus important (et qui est souvent appelé axiome d'excision), on fixe quelques notations. Pour $A \subset X$, on note $F(X, A)$ le conoyau du morphisme $F(A) \to F(X)$ et $H_*^F(X, A)$ les groupes d'homologie de ce complexe. Le foncteur $(X, A) \mapsto H_*^F(X, A)$ est un foncteur de la catégorie des paires d'espaces topologiques vers les R-modules gradués. Pour (X, x) un espace pointé, on note $\tilde{H}_*^F(X) = H_*^F(X, x)$.

(H5) Si l'inclusion $A \to X$ est une bonne paire, alors le morphisme

$$H_*^F(X, A) \to \tilde{H}_*^F(X/A)$$

induit par le morphisme de paire $(X, A) \to (X/A, A/A)$ est un isomorphisme.

On va déduire quelques conséquences de ces axiomes.

Lemme 7.29. *Soit F satisfaisant l'axiome (H4). Soit (X, x) un espace topologique pointé, alors le morphisme $H_*^F(X) \to \tilde{H}_*^F(X)$ induit par le morphisme de paires $(X, \varnothing) \to (X, x)$ et le morphisme $H_*^F(X) \to H_*^F(pt)$ induit par l'unique application $X \to pt$ s'assemblent en un isomorphisme*

$$H_*^F(X) \cong \tilde{H}_*^F(X) \oplus H_*^F(pt)$$

Preuve. La suite exacte longue de la paire (X, x) nous donne une suite exacte

$$H_k^F(pt) \xrightarrow{i} H_k^F(X) \xrightarrow{p} \tilde{H}_k^F(X) \xrightarrow{u} H_{k-1}^F(pt) \xrightarrow{j} H_{k-1}^F(X)$$

Le morphisme i est une injection scindé, un scindement est donné par le morphisme induit par l'unique application $X \to pt$. Pour la même raison, le morphisme j est une injection. On en déduit que $H_i^F(X) \cong H_i^F(pt) \oplus I$ où I est l'image du morphisme p. Cette image est le noyau du morphisme u. Puisque le morphisme j est injectif, le morphisme u est nul et on obtient bien le résultat voulu. □

On peut faire un calcul de l'homologie des sphères à partir des axiomes (H1), (H4) et (H5). La suite exacte longue de groupes d'homologies induite par la paire (D^n, S^{n-1}) donne un morphisme connectant

$$H_i^F(D^n, S^{n-1}) \to H_{i-1}^F(S^{n-1})$$

En utilisant l'isomorphisme $H_i^F(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_i^F(S^n)$ donné par l'axiome (H5) et le morphisme

$$H_{i-1}^F(S^{n-1}) \to \tilde{H}_{i-1}^F(S^{n-1})$$

induit par le morphisme de paire $(S^{n-1}, \varnothing) \to (S^{n-1}, x)$ où x est n'importe quel point de S^{n-1}, on obtient un morphisme

$$\tilde{H}_i^F(S^n) \to \tilde{H}_{i-1}^F(S^{n-1})$$

On a alors le résultat suivant.

Lemme 7.30. *Ce morphisme est un isomorphisme.*

Preuve. Considérons la suite exacte longue pour la paire (D^n, S^{n-1}) en utilisant l'isomorphisme de l'axiome (H5), on trouve une suite exacte

$$H_i^F(S^{n-1}) \to H_i^F(D^n) \to \tilde{H}_i^F(S^n) \to H_{i-1}^F(S^{n-1}) \to H_{i-1}^F(D^n)$$

Le morphisme $H_i^F(S^{n-1}) \to H_i^F(D^n)$ est surjectif. En effet, la composée de l'inclusion $x \to S^{n-1}$ avec l'inclusion $S^{n-1} \to D^n$ et la projection $D^n \to pt$ est homotope à l'identité. Par fonctorialité de H_*^F ce morphisme possède donc une section. On en déduit donc une suite exacte

$$0 \to \tilde{H}_i^F(S^n) \to H_{i-1}^F(S^{n-1}) \to H_{i-1}^F(D^n)$$

Par le même argument, le morphisme $H_{i-1}^F(S^{n-1}) \to H_{i-1}^F(D^n)$ est surjectif et son noyau s'identifie précisément avec $\tilde{H}_i^F(S^{n-1})$ par l'analyse du lemme précédent. On en déduit l'isomorphisme voulu. □

Enfin on calcule l'homologie d'un bouquet de sphères.

Lemme 7.31. *Soit F satisfaisant les axiomes (H1), (H2), (H4) et (H5). Soit I un ensemble. Alors le morphisme évident*

$$\oplus_{i \in I} \tilde{H}_*^F(S^n) \to \tilde{H}_*^F(\vee_i S^n)$$

est un isomorphisme.

Preuve. On considère la suite exacte longue associée à la paire $(\sqcup_i S^n, \sqcup_i pt)$ où l'inclusion est donnée par le point base dans chaque sphère. On peut de même considérer la suite exacte longue obtenue par somme directe de I copie de la suite exacte longue de la paire (S^n, x). En utilisant l'axiome (H2) et (H5), on obtient un diagramme commutatif de la forme suivante

$$\begin{tikzcd}
\oplus_i H_k^F(pt) \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_i H_k^F(S^n) \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_i \tilde{H}_k^F(S^n) \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_i H_{k-1}^F(pt) \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_i H_{k-1}^F(S^n) \arrow[d] \\
H_k^F(\sqcup_i pt) \arrow[r] & H_k^F(\sqcup_i S^n) \arrow[r] & \tilde{H}_k^F(\vee_i S^n) \arrow[r] & H_{k-1}^F(\sqcup_i pt) \arrow[r] & H_{k-1}^F(\sqcup_i S^n)
\end{tikzcd}$$

où les deux lignes sont des suites exactes et tous les morphismes sauf peut-être celui du mileu sont des isomorphismes. Par le lemme des cinq, le morphisme du milieu est donc un isomorphisme. □

Lemme 7.32. *Soit $\alpha : F \to G$ une transformation naturelle entre foncteurs* **Top** $\to$ $\mathbf{Ch}_*(R)$ *satisfaisant l'axiome (H4). Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques. Si parmi les trois morphismes*

$$\alpha_A : H_*^F(A) \to H_*^G(A),\ \alpha_X : H_*^F(X) \to H_*^G(X),\ \alpha_{(X,A)} : H_*^F(X, A) \to H_*^G(X, A)$$

deux parmi les trois sont des isomorphismes, alors le troisième en est un également.

Preuve. C'est simplement une application du lemme des cinq. □

On peut maintenant montrer notre résultat principal.

Théorème 7.33. *Soit $\alpha : F \to G$ une transformation naturelle entre foncteurs* **Top** $\to$ $\mathbf{Ch}_*(R)$ *satisfaisant les axiomes (H1) à (H5). Si α induit un isomorphisme $H_*^F(pt) \to H_*^G(pt)$, alors α induit un isomorphisme $H_*^F(X) \to H_*^G(X)$ pour tout espace topologique X homotopiquement équivalent à un CW-complexe.*

Preuve. Par l'axiome (H1), on peut se restreindre à montrer le résultat pour X un CW-complexe. Par l'axiome (H3), il est suffisant de montrer le résultat pour X un CW-complexe de dimension finie. Par le lemme précédent, le théorème est vrai pour $X = X_n$ un CW-complexe de dimension n s'il est vrai pour X_{n-1}, son $(n-1)$-squelette est pour la paire (X_n, X_{n-1}). Puisque le résultat est vrai pour un espace discret par l'axiome (H2), un raisonnement par récurrence montre qu'il est suffisant de montrer que α induit un isomorphisme

$$H_*^F(X_n, X_{n-1}) \to H_*^G(X_n, X_{n-1})$$

pour tout inclusion $X_{n-1} \to X_n$ du $(n-1)$-squelette dans le n-squelette d'un CW-complexe X. Par l'axiome (H5), on se ramène à montrer que α induit un isomorphisme

$$\tilde{H}_*^F(\vee_{i \in I} S^n) \to \tilde{H}_*^G(\vee_{i \in I} S^n)$$

Par le Lemme 7.31, il suffit de le montrer pour une unique sphère. Par récurrence sur n et en utilisant le Lemme 7.30, il suffit de le montrer pour la sphère S^0 auquel cas le résultat est vrai par hypothèse. □

5. Caractéristique d'Euler

DÉFINITION 7.34. Soit C_* un complexe de chaîne dans les espaces vectoriels sur un corps k. On suppose que tous les groupes d'homologie de C_* sont de dimension finie et que $H_i(C_*) = 0$ pour suffisament grand. On définit la caractéristique d'Euler de C_* notée $\chi(C_*)$ par la formule suivante

$$\chi(C_*) = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \dim H_i(C_*)$$

PROPOSITION 7.35. *Soit C_* un complexe de chaînes sur $\mathbb{Z}$ avec C_i libre pour tout i. On suppose que tous les groupes d'homologie de C_* sont des groupes abéliens de type fini et nuls en degré suffisamment grand. Alors, pour tout nombre premier p, on a l'égalité*

$$\chi(C_* \otimes \mathbb{Q}) = \chi(C_* \otimes \mathbb{F}_p)$$

PREUVE. Observons d'abord que les hypothèse sur C_* impliquent que les caractéristiques d'Euler de $C_* \otimes \mathbb{Q}$ et $C_* \otimes \mathbb{F}_p$ sont bien définies. Pour un entier i, on peut décomposer le groupe $H_i(C_*)$ de la façon suivante

$$H_i(C) = \left(\bigoplus_{A_i} \mathbb{Z} \right) \oplus \left(\bigoplus_{b \in B_i} \mathbb{Z}/(p^{n_b}) \right) \oplus R_i$$

avec A_i et B_i des ensembles finis et R_i un groupe abélien fini dont tous les éléments sont d'ordre premier à p. Par le Corollaire 5.17, on a $\dim(H_i(C_* \otimes \mathbb{Q})) = |A_i|$. Par le Théorème 5.19, on a une suite exacte courte

$$0 \to \left(\bigoplus_{A_i} \mathbb{F}_p \right) \oplus \left(\bigoplus_{b \in B_i} \mathbb{F}_p) \right) \to H_i(C_* \otimes \mathbb{F}_p) \to \bigoplus_{B_{i-1}} \mathbb{F}_p \to 0$$

(en prenant la convention $B_{-1} = \varnothing$). En effet, on observe que $\mathbb{Z}/(p^n) \otimes \mathbb{F}_p \cong \mathbb{F}_p$ et $(\mathbb{Z}/(p^n))_{(p)} \cong \mathbb{F}_p$. On a donc

$$\chi(C_* \otimes \mathbb{Q}) = \sum_i (-1)^i |A_i|$$

et

$$\chi(C_* \otimes \mathbb{F}_p) = \sum_i (-1)^i (|A_i| + |B_i| + |B_{i-1}|)$$

On se convaincra aisément que ces deux sommes sont égales. □

PROPOSITION 7.36. *Soit C_* un complexe de chaînes sur un corps k. On suppose que C_i est de dimension finie pour tout i et que C_i est nul pour i suffisament grand. Alors*

$$\chi(C_*) = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \dim(C_i)$$

PREUVE. Chaque C_i peut se décomposer comme une somme directe $Z_i \oplus R_i$ où Z_i est le sous espace des cycles et R_i est un supplémentaire quelconque. L'espace Z_i peut se décomposer comme $B_i \oplus H_i$ où B_i est le sous-espace des bords et H_i est le i-ème groupe d'homologie. Notons alors h_i, b_i et r_i les dimensions de H_i B_i et R_i respectivement. La différentielle d_{i+1} induit un isomorphisme entre R_{i+1} et B_i. On a donc $r_{i+1} = b_i$ pour tout i. On peut alors calculer

$$\begin{aligned}
\sum_i (-1)^i c_i &= \sum_i (-1)^i (h_i + b_i + r_i) \\
&= \chi(C_*) + \sum_i (-1)^i (r_{i+1} + r_i) \\
&= \chi(C_*)
\end{aligned}$$

□

Cette proposition a le corollaire important suivant.

Corollaire 7.37. *Soit k un corps et*

$$0 \to C_n \to C_{n-1} \to \ldots \to C_1 \to C_0 \to 0$$

une suite exacte longue de longueur finie. Alors on a l'égalité

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \dim(C_i) = 0$$

Preuve. En effet, on peut interpréter cette suite comme un complexe de chaînes. L'exactitude nous dit précisément que tous les groupes d'homologie sont nuls. On peut donc appliquer la proposition précédente. □

On peut maintenant définir la caractéristique d'Euler d'un espace topologique.

Définition 7.38. Soit X un espace topologique tel que les groupes d'homologie $H_i(X)$ sont de type fini et nuls pour i suffisament grand. Alors, on définit la caractéristique d'Euler de X notée $\chi(X)$ comme la caractéristique d'Euler du complexe $C_*(X, \mathbb{Q})$.

On remarque qu'on aurait pu tout aussi bien utiliser le corps $\mathbb{F}_p$ pour définir la caractéristique d'Euler, la Proposition 7.35 montre que cela n'aurait pas changé le résultat.

Proposition 7.39. *On a*

(1) *Si deux espaces X et Y sont homotopiquement équivalents, alors $\chi(X) = \chi(Y)$.*
(2) *Si X est contractile $\chi(X) = 1$.*
(3) *On a la formule $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.*
(4) *Si $X = X_1 \sqcup X_2$, alors $\chi(X) = \chi(X_1) + \chi(X_2)$.*
(5) *Si X est recouvert par deux ouverts U_1 et U_2, on a*

$$\chi(X) = \chi(U_1) + \chi(U_2) - \chi(U_1 \cap U_2)$$

(6) *Si X est un CW-complexe fini avec n_i cellules de dimension i, on a*

$$\chi(X) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i n_i$$

Preuve. Les deux premières assertions sont élémentaires. La troisième est un calcul facile qui découle de la formule de Künneth. La quatrième découle de la Proposition 6.12. Pour la cinquième, on peut utiliser la suite exacte longue de Mayer-Vietoris et la combiner avec le Corollaire 7.37. Enfin pour la dernière assertion, on peut remplacer la complexe de chaînes singulières par le complexe cellulaire. Ce complexe est de dimension n_i en degré i, on peut donc appliquer la Proposition 7.36. □

Exemple 7.40. Un ballon de football est obtenu en cousant entre eux des pentagones et des hexagones. On peut le voir comme une structure de CW-complexe sur la 2-sphère. On a 12 pentagones et 20 hexagones. On peut compter le nombre de cellules. On a 60 cellules de dimension 0 (on compte 6 pour chaque hexagone, 5 pour chaque pentagone et on divise par 3 car chaque sommet est partagé par 3 faces). De même on a 90 cellules de dimension 1. Enfin on a 32 cellules de dimension 2. On a $60 - 90 + 32 = 2$ qui est bien la caractéristique d'Euler de la 2-sphère.

Exemple 7.41. Un graphe est dit planaire s'il peut se plonger dans le plan sans que deux arêtes ne se croisent. Quitte à rajouter un point à l'infini, un plongement d'un graphe dans le plan donne une CW-structure sur la 2-sphère. Si G est un graphe avec v sommets et e arêtes qui se plonge dans le plan, le nombre de 2-cellules de la CW-structure obtenue est au plus $2e/3$ (une cellule doit être bordée par au moins 3 arêtes mais une même arête peut border 2-cellules). Puisque au final la caractéristique d'Euler doit être 2, on trouve l'inégalité

$$e \leq 3v - 6$$

qui est une condition nécéssaire pour que G puisse soit planaire.

EXEMPLE 7.42. Un calcul similaire montre que la condition pour plonger G dans une surface de genre g est que l'inégalité

$$e \leq 3v - 6 + 6g$$

soit vérifiée.

6. Formule de Künneth

Dans cette section K désigne un corps. Rappelons qu'on dispose du produit cartésien des sur l'homologie singulière

$$- \times - : H_*(X;K) \otimes_K H_*(Y;K) \to H_*(X \times Y;K)$$

Notre théorème principal est le suivant.

THÉORÈME 7.43. *Soient X et Y deux espaces quelconques, soit n un entier, le produit cartésien induit un isomorphisme*

$$\bigoplus_{i+j=n} H_i(X;K) \otimes_K H_j(Y;K) \cong H_n(X \times Y;K)$$

PREUVE. Même si ce résultat est vrai en toute généralité, on ne va le montrer que dans le cas particulier où X un CW-complexe. On considère l'espace Y fixé. Dans ce cas, le produit cartésien au niveau des chaînes nous fournit une transformation naturelle

$$C_*(X) \otimes_K C_*(Y) \to C_*(X \times Y)$$

On note $X \mapsto F(X)$ la source de ce morphisme et $X \mapsto G(X)$ son but. Il est clair que cette transformation naturelle induit un isomorphisme pour $X = pt$. Par le Théorème 7.33, il suffit donc de s'assurer que F et G satisfont aux axiomes (H1) à (H5). Pour les axiomes (H1) à (H4), ce sont des vérifications de routine. Pour l'axiome (H5). C'ést évident pour G, en effet, si (X, A) est une bonne paire, alors $(X \times Y, A \times Y)$ est une bonne paire par la Proposition 7.13.

Pour le foncteur F, on doint montrer que le morphisme

$$C_*(X, A) \otimes C_*(Y) \to C_*(X/A, A/A) \otimes C_*(Y)$$

induit par l'application de paires $(X, A) \to (X/A, A/A)$ induit un isomorphisme sur les groupes d'homologie. En utilisant le Théorème 5.22, on se ramène à prouver que

$$H_i(X, A) \otimes_K H_j(Y) \to H_i(X/A, A/A) \otimes H_j(Y)$$

est un isomorphisme pour tout i et j ce qui est une conséquence du Théorème 7.16. □

REMARQUE 7.44. Ce résultat n'est en général pas vrai si l'anneau des coefficients n'est pas un corps.

EXEMPLE 7.45. On en déduit par exemple que l'homologie du tore $S^1 \times S^1$ à coefficients dans n'importe quel corps est de dimension 1 en degré 0, 2 en degré 1, 1 en degré 2 et nulle en tout autre degré.

CHAPITRE 8

Cohomologie singulière

Dans tout ce chapitre K désigne un corps commutatif.

1. Complexes de cochaînes

Définition 8.1. Un complexe de cochaînes sur K est un diagramme

$$C^0 \xrightarrow{d^1} C^1 \xrightarrow{d^2} C^2 \xrightarrow{d^3} \dots$$

dans la catégorie des K-espaces vectoriels tel que $d^{i+1} \circ d^i = 0$ pour tout i.

Définition 8.2. Le i-ème groupe de cohomologie d'un complexe de cochaîne est le K-espace vectoriel

$$H^i(C) = \ker(d^{i+1}) / \operatorname{im}(d^i)$$

Exemple 8.3. Étant donné C_* un complexe de chaînes sur K. On peut prendre le dual en chaque degré et on obtient un complexe de cochaîne D^* avec

$$D^i = \operatorname{Hom}_K(C_i, K)$$

Dans le cas de l'exemple ci-dessus, la cohomologie de D^* se déduit de l'homologie de C_*. On peut construire un morphisme

$$\Delta : H^i(D^*) \to H_i(C_*)^\vee$$

de la façon suivante. Si $\phi : C_i \to K$ est une application linéaire dans le noyau de d^i, c'est à dire que $\phi(d_{i+1}(-)) = 0$. Alors, on définit $\Delta(\phi) : H_i(C_*) \to K$ par la formule suivante

$$\Delta(\phi)[x] = \phi(x)$$

Si $x = d_{i+1}(y)$, on a $\phi(x) = 0$ ce qui montre que cette formule définit bien un morphisme

$$\Delta : Z^i(D^*) \to H_i(C_*)^\vee$$

Par ailleurs si ϕ est un cobord, c'est-à-dire $\phi = \psi \circ d^{i+1}$,on constate que $\Delta(\phi)$ est nul sur les cycles. On en déduit que Δ induit un morphisme

$$\Delta : H^i(D^*) \to H_i(C_*)^\vee$$

Proposition 8.4. *On conserve les notations ci-dessus. Le morphisme*

$$\Delta : H^i(D^*) \to H_i(C_*)^\vee$$

est un isomorphisme.

Preuve. Prouvons d'abord la surjectivité. On se donne une application linéaire $\phi : H_i(C_*) \to K$. De manière équivalente, ϕ est une application linéaire $Z_i(C_*) \to K$ qui s'annulle sur $B_i(C_*)$. On peut prolonger ϕ à C_i tout entier en la définissant comme zéro sur un supplémentaire de $Z_i(C_*)$ et on obtient un morphisme $\psi : C_i \to K$. Par ailleurs, on a $\psi \circ d_{i+1} = 0$ puisque ψ s'annule sur $B_i(C_*)$. On a alors $\Delta(\psi) = \phi$.

Montrons maintenant l'injectivité. Soit $\psi \in Z^i(D^*)$ tel que $\Delta(\psi) = 0$. Cela implique que ψ s'annulle sur $Z_i(C_*)$. Considérons alors le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
Z_i(C) \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & C_i \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & C_i/Z_i(C) \arrow[r, "d_i"'] & C_{i-1} \\
& K & &
\end{tikzcd}$$

Le morphisme ψ se factorise à travers le quotient C_i/Z_i. Ce dernier espace s'injecte dans C_{i-1} via la différentielle d_i. On peut choisir un supplémentaire de C_i/Z_i dans C_{i-1} et étendre ψ par zéro sur ce supplémentaire. On obtient que le morphisme ψ se factorise sous la forme $\psi = \psi' \circ d_i$ où ψ' est une forme linéaire sur C_{i-1}. En d'autres termes ψ est un cobord. $\square$

On peut alors définir la cohomologie d'un espace.

DÉFINITION 8.5. Soit X un espace topologique. Le complexe des cochaînes singulières sur X à coefficients dans K est le complexe $C^*(X;K)$ dual du complexe des chaînes singulières à coefficients dans K. La cohomologie singulière de X notée $H^*(X;K)$ est la cohomologie de ce complexe.

Par la proposition précédente, la cohomologie est le dual de l'homologie. En particulier, tous les résultats qu'on a vu sur l'homologie impliquent des résultats analogues en cohomologie en passant au dual. Prendre garde au fait que la cohomologie est un foncteur contravariant : une application continue $f : X \to Y$ imduit un morphisme

$$H^n(f) : H^n(Y;K) \to H^n(X;K)$$

2. Le cup-produit

DÉFINITION 8.6. Pour R un anneau commutatif. La catégorie des R-modules gradués gradués est la catégorie dont les objets sont les familles $\{V^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de R-modules, et dont les morphismes $\{V^n\} \to \{W^n\}$ sont les collections de morphismes R-linéaires $f^n : V^n \to W^n$.

Le produit tensoriel de deux R-modules gradués est donné par la formule

$$(V \otimes_R W)^n = \oplus_{i+j=n} V^i \otimes_R W^j$$

REMARQUE 8.7. D'un point de vue algébrique, il ne fait bien-sûr aucune différence de mettre l'indice en haut ou en bas. La convention est que dans cadre homologique on le met en bas et dans un cadre cohomologique on le met en haut.

REMARQUE 8.8. Muni de cette définition, la formule de Künneth (Théorème 7.43) peut s'énoncer de manière très compacte. Elle affirme que le K-espace vectoriel gradué $H_*(X \times Y;K)$ est isomorphe à $H_*(X;K) \otimes_K H_*(Y;K)$.

DÉFINITION 8.9. Soient V et W deux K-espaces vectoriels gradués. On appelle isomorphisme de tressage gradué l'isomorphisme

$$T_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$$

qui envoie le tenseur élémentaire $v \otimes w$ avec $v \in V^i$ et $w \in W^j$ sur $(-1)^{ij} w \otimes v$.

REMARQUE 8.10. Cet isomorphisme est déjà apparu de manière un peu cachée dans ce cours. En effet, pour deux espaces X et Y L'homéomorphisme évident $X \times Y \cong Y \times X$ et la formule de Künneth induisent un ismorphisme

$$H_*(X;K) \otimes_K H_*(Y;K) \cong H_*(Y;K) \otimes_K H_*(X;K)$$

Cet isomorphisme est l'isomorphisme de tressage comme on peut le vérifier en utilisant la propriété de commutativité du produit cartésien (Proposition 6.48).

DÉFINITION 8.11. Une K algèbre graduée (resp. K-algèbre commutative graduée) est la donnée d'un espace vectoriel gradué A, d'un morphisme $\eta : K \to A$ et d'un morphisme $\mu : A \otimes A \to A$ satisfaisant les axiomes (1) et (2) (resp. (1) (2) et (3)) suivants

(1) Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\cong"] \arrow[drr, "\mathrm{id}"'] & A \otimes K \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\eta"] & A \otimes A \arrow[d] & K \otimes A \arrow[l, "\eta\otimes\mathrm{id}"'] & A \arrow[l, "\cong"'] \arrow[dll, "\mathrm{id}"] \\
 & & A & &
\end{tikzcd}$$

commute.

(2) Le diagramme

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes A \arrow[r, "\mu\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mu"'] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A\otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd}$$

commute.

(3) Le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "T_{A,A}"'] & A \\ A\otimes A \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

REMARQUE 8.12. On dispose d'un foncteur oubli qui envoie un espace vectoriel gradué V_* sur l'espace vectoriel $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Ce foncteur envoie les algèbres graduées sur des algèbres. Cependant, il faut prendre garde au fait qu'une algèbre commutative graduée ne s'envoie pas nécéssairement sur une algèbre commutative.

La raison pour laquelle on introduit cette notion est la Proposition suivante.

PROPOSITION 8.13. *Soit X un espace topologique. La cohomologie de X à coefficients dans K a naturellement la structure d'une K-algèbre commutative graduée.*

PREUVE. Soient $\phi : H_*(X;K) \to K$ and $\psi : H_*(X;K) \to K$ deux classes de cohomologie. Leur produit est défini comme la composée suivante

$$H_*(X;K) \to H_*(X\times X;K) \xleftarrow{\cong} H_*(X;K)\otimes H_*(X;K) \xrightarrow{\phi\otimes\psi} K$$

où le premier morphisme est induit par l'application diagonale $X \to X\times X$ et le morphisme pointant vers la gauche est le produit cartésien. La naturalité du produit cartésien montre que ce procédé est bien naturel en X. Par ailleurs les propriétés d'associativité et de commutativité du produit cartésien montrent que cette opération est bien associative et commutative. L'unité est donnée par le morphisme

$$K \cong H^*(pt;K) \to H^*(X;K)$$

induit par l'unique application $X \to pt$. □

NOTATION 8.14. On appelle ce produit le cup-produit. Il est fréquent de noter le cup-produit par le symbole $\cup$. Ainsi pour x une classe de cohomologie de degré i et y une classe de degré j, on note $x\cup y$ leur cup produit qui vit dans $H^{i+j}(X;K)$.

Étant données deux algèbres graduées (A,η,μ) et (B,θ,ν). Leur produit tensoriel $A\otimes B$ hérite d'une structure d'algèbre graduée dont l'unité est le morphisme

$$K \cong K\otimes K \xrightarrow{\eta\otimes\theta} A\otimes B$$

et la multiplication est le morphisme

$$(A\otimes B)\otimes(A\otimes B) \xrightarrow{\mathrm{id}_A\otimes T_{A,B}\otimes\mathrm{id}_B} (A\otimes A)\otimes(B\otimes B) \xrightarrow{\mu\otimes\nu} A\otimes B$$

Par ailleurs, si A et B sont commutatives, on constate que $A\otimes B$ l'est également.

PROPOSITION 8.15. *Soient A et B deux algèbres commutatives graduées, alors les deux morphismes*

$$\eta\otimes\mathrm{id}_B : B \to A\otimes B$$

et

$$\mathrm{id}_A\otimes\eta : A \to A\otimes B$$

font de $A\otimes B$ le coproduit de A et B dans la catégorie des algèbres commutatives graduées.

Preuve. Il s'agit de montrer que pour toute algèbre commutative graduée C, l'application

$$e : \mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C) \times \mathrm{Hom}(B, C)$$

induite par ces deux morphismes est une bijection. Il suffit de construire sa bijection réciproque. Étant donnés $\phi : A \to C$ et $\psi : B \to C$ deux morphismes d'algèbres graduées, on peut considérer la composée

$$A \otimes B \xrightarrow{\phi\otimes\psi} C \otimes C \xrightarrow{\nu} C$$

On vérifie que c'est bien un morphisme d'algèbres graduées et que c'est un inverse pour l'application e ci-dessus. □

Un espace topologique est dit être de K-type fini si son homologie à coefficients dans K est de type fini en chaque degré. On note $\mathbf{hTop}^{tf}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{hTop}$ dont les objets sont les espaces de K-type fini.

Proposition 8.16. *Le foncteur $X \mapsto H^*(X, K)$ de la catégorie $\mathbf{hTop}^{tf}$ vers la catégorie $\mathbf{ACG}^{\mathrm{op}}$ préserve les produits.*

Preuve. Il s'agit de montrer que le morphisme d'algèbre

$$H^*(X, K) \otimes H^*(Y, K) \to H^*(X \times Y, K)$$

est un isomorphisme. Pour ce faire on peut oublier la structure d'algèbre. Le résultat est alors une conséquence du théorème de Künneth et du fait que la dualisation préserve les produit tensoriels en dimension finie. □

Rappellons qu'un h-monoïde (resp. h-monoïde commutatif) est un objet monoïde (resp. monoïde commutatif) dans la catégorie $\mathbf{hTop}_*$.

Définition 8.17. Une algèbre de Hopf (resp. algèbre de Hopf commutative) graduée est un objet monoïde (resp. un objet monoïde commutatif) dans la catégorie $\mathbf{ACG}^{\mathrm{op}}$.

On peut expliciter cette définition. Une algèbre de Hopf est un algèbre commutative gradué (A, η, μ) avec la donnée supplémentaire de deux morphismes d'algèbre commutative gradués

$$\epsilon : A \to K \quad \text{et} \quad \Delta : A \to A \otimes A$$

tels que la formule de counitalité suivante :

$$(\epsilon \otimes \mathrm{id}_A) \circ \Delta = \mathrm{id}_A = (\mathrm{id}_A \otimes \epsilon) \circ \Delta$$

soit vérifiée ainsi que la formule de coassociativité :

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}_A) \circ \Delta = (\mathrm{id}_A \otimes \Delta) \circ \Delta$$

Une algèbre de Hopf commutative a en plus la propriété que l'équation de cocommutativité :

$$T_{A,A} \circ \Delta = \Delta$$

est satisfaite.

On utilisera a plusieurs reprise le lemme suivant.

Lemme 8.18. *Soit $(A, \eta, \mu, \epsilon, \Delta)$ une algèbre de Hopf graduée. Supposons A^0 de dimension 1 et soit n le plus petit degré strictement positif tel que A^n soit non nul. Alors pour tout x dans A^n, on a*

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

Preuve. Puisque A^0 est de dimension 1, le morphisme η est un isomorphisme et A^0 est donc engendré par 1. On a donc

$$\Delta(x) = u \otimes 1 + 1 \otimes v$$

avec u et v deux éléments de A^n. On observe que $\epsilon(u) = \epsilon(v) = 0$. En appliquant $\epsilon \otimes \mathrm{id}_A$ et $\mathrm{id}_A \otimes \epsilon$ à cette équation, on trouve respectivement $x = v$ et $x = u$. □

Remarque 8.19. Il est important de noter qu'on n'a pas utilisé la coassociativité de Δ mais simplement la counitalité.

3. Calcul de la cohomologie des espaces projectifs

Introduisons l'espace topologique $\mathbb{CP}^\infty$. Il est défini comme étant la colimite du diagramme

$$\mathbb{CP}^0 \xrightarrow{i_0} \mathbb{CP}^1 \xrightarrow{i_1} \mathbb{CP}^2 \xrightarrow{i_2} \dots$$

où l'application $i_n : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^{n+1}$ est définie par

$$[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \mapsto [x_0 : x_1 : \ldots : x_n : 0]$$

Proposition 8.20. *L'homologie de l'espace $\mathbb{CP}^\infty$ est de dimension 1 en tout degré pair est de dimension 0 en tout degré impair. Par ailleurs, pour tout entier naturel n, l'inclusion $\mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^\infty$ induit un isomorphisme en homologie en degrés $\leq 2n$.*

Preuve. C'est un calcul d'homologie cellulaire. □

Construction 8.21. On va construire une structure de h-monoïde sur $\mathbb{CP}^\infty$. On va commencer par donner un modèle pratique de cet espace. On part de l'espace $\mathbb{C}[X]$ des polynômes sur $\mathbb{C}$. On voit cet espace comme la colimite des sous-espaces des polynômes de degré inférieur ou égal à n pour n fixé. On le munit de la topologie colimite. On peut alors considérer l'espace quotient $(\mathbb{C}[X]-\{0\})/\mathbb{C}^\times$ où $\mathbb{C}^\times$ agit par multiplication. Cet espace est homéomorphe à l'espace topologique $\mathbb{CP}^\infty$.

Pour construire la structure de h-monoïde, on va partir de la multiplication des polynômes

$$\mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$$

Cette multiplication est associative, commutative et unitaire. Par ailleurs, il n'existe pas de diviseurs de zéro. Elle induit donc une structure de monoïde associatif commutatif et unitaire sur $\mathbb{C}[X] - \{0\}$. Par ailleurs, on vérifie sans peine que cette structure passe au quotient par l'action de $\mathbb{C}^\times$. On obtient ainsi une structure de monoïde associatif commutatif et unitaire sur $\mathbb{CP}^\infty \cong (\mathbb{C}[X] - \{0\})/\mathbb{C}^\times$.

Théorème 8.22. *Soit K un corps de caractéristique zéro. Fixons un générateur u de $H^2(\mathbb{CP}^\infty, K)$. Alors l'unique morphisme d'algèbre commutative graduée*

$$K[u] \to H^*(\mathbb{CP}^\infty, K)$$

qui envoie u sur u est un isomorphisme.

Preuve. Montrons l'injectivité. Il s'agit de montrer que toutes les puissances de u sont non-nulles dans $H^*(\mathbb{CP}^\infty, K)$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Soit n le plus petit nombre entier tel que $u^n = 0$. La structure de h-monodïde sur $\mathbb{CP}^\infty$ induit une structure d'algèbre de Hopf sur sa cohomologie. Notons Δ la diagonale de cette algèbre de Hopf. Grâce au Lemme 8.18. On trouve

$$\Delta(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u$$

Comme Δ est un morphisme d'algèbre, on a

$$0 = \Delta(u^n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (u^i \otimes u^{n-i})$$

Par hypothèse, les puissances de u de degré strictement inférieur à n forment une famille libre dans la cohomologie de $\mathbb{CP}^\infty$. On déduit donc de l'équation ci-dessus que tous les coefficients $\binom{n}{i}$ avec $0 < i < n$ sont nuls dans K. L'hypothèse que K est de caractéristique zéro implique une contradiction.

On a donc une application injective

$$K[u] \to H^*(\mathbb{CP}^\infty, K)$$

Puisque la source et le but sont des espaces vectoriels gradués de dimension finies en chaque degré et de même dimension, l'application est surjective en chaque degré et est donc surjective. □

Corollaire 8.23. *Soit $n \geq 1$, soit u un générateur de $H^2(\mathbb{CP}^n)$. Alors, l'unique application*

$$K[u] \to H^*(\mathbb{CP}^n, K)$$

envoyant u sur u induit un isomorphisme

$$K[u]/(u^{n+1}) \cong H^*(\mathbb{CP}^n, K)$$

PREUVE. Puisque l'inclusion $\mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^\infty$ induit un isomorphisme sur H^2, on peut choisir un générateur u de $H^2(\mathbb{CP}^\infty)$ tel que le morphisme induit

$$H^2(\mathbb{CP}^\infty, K) \to H^2(\mathbb{CP}^n, K)$$

envoie u sur u. Par le théorème précédent, il suffit donc de montrer que l'inclusion $\mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^\infty$ induit une surjection en cohomologie. Dualement, il faut montrer qu'elle induit une injection en homologie ce qui découle du calcul de la Proposition 8.20. $\square$

On a un théorème analogue pour les espaces projectifs réels.

THÉORÈME 8.24. *Soit $n \geq 1$, soit u un générateur de $H^1(\mathbb{RP}^n, \mathbb{F}_2)$, alors, l'unique morphisme*

$$\mathbb{F}_2[u] \to H^*(\mathbb{RP}^n, \mathbb{F}_2)$$

envoyant u sur u induit un morphisme

$$\mathbb{F}_2[u]/(u^{n+1}) \cong H^*(\mathbb{RP}^n, \mathbb{F}_2)$$

4. Applications du cup-produit

Une application élégante du cup-produit est une preuve du théorème fondamental de l'algèbre.

THÉORÈME 8.25. *Soit K une extension algébrique de $\mathbb{C}$. Alors $K = \mathbb{C}$.*

PREUVE. Notons n la dimension de K comme espace vectoriel. La multplication de K se restreint en une multiplication commutative et associative :

$$K^\times \times K^\times \to K^\times$$

Cette multiplication fait de K une $\mathbb{C}$-algèbre et donc se factorise en une multiplication μ unitaire associative et commutative sur $\mathbb{CP}^{n-1} \cong K^\times/\mathbb{C}^\times$. On a donc une structure d'algèbre de Hopf sur $H^*(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^n)$. La diagonale Δ de cette algèbre de Hopf est entièrement déterminée par $\Delta(x)$. Par le Lemme 8.18, on doit avoir

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

Puisque Δ est un morphisme d'algèbre, on a

$$(x \otimes 1 + 1 \otimes x)^n = \Delta(x)^n = \Delta(x^n) = 0$$

En développant le membre de gauche, on trouve

$$\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i} = 0$$

C'est absurde, à part si $n = 1$. $\square$

REMARQUE 8.26. On observe qu'on a utilisé seulement le fait que la multiplication de $\mathbb{CP}^{n-1}$ était unitaire.

On peut aussi prouver le théorème suivant.

THÉORÈME 8.27. *Il n'existe pas de multiplication unitaire sur $\mathbb{RP}^n$ si n n'est pas de la forme $2^k - 1$ avec $k \in \mathbb{N}$*

PREUVE. Une telle multiplication induit une comultiplication

$$\Delta : H^*(\mathbb{RP}^n, \mathbb{F}_2) \to H^*(\mathbb{RP}^n, \mathbb{F}_2) \otimes H^*(\mathbb{RP}^n, \mathbb{F}_2)$$

On a $H^*(\mathbb{RP}^n, \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[x]/x^{n+1}$. Puisque Δ est un morphisme de $\mathbb{F}_2$-algèbre, il suffit de déterminer $\Delta(x)$. En utilisant l'unité de la multiplication comme dans le théorème précédent, on trouve la formule

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

Puisque Δ est un morphisme d'algèbre, on doit avoir

$$(x \otimes 1 + 1 \otimes x)^{n+1} = \Delta(x)^{n+1} = 0$$

En développant on trouve

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} x^i \otimes x^{n+1-i} = 0$$

ce qui implique que tous les coefficients binomiaux $\binom{n+1}{i}$ avec $1 \leq i \leq n$ doivent être pairs. Un exercice facile d'algèbre montre que c'est le cas seulement si $n+1$ est une puissance de 2. □

Corollaire 8.28. *Supposons qu'il existe une multiplication m sur $\mathbb{R}^n$ qui satisfait les conditions suivantes*

(1) *La multiplication m est $\mathbb{R}$-bilinéaire.*
(2) *La multiplication m est unitaire.*
(3) *La multiplication m n'a pas de diviseurs de zéro. En d'autre termes, si $m(x,y) = 0$ alors $x = 0$ ou $y = 0$.*

Alors, on a nécéssairement $n = 2^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Preuve. La condition (3) implique que m se restreint en une multiplication

$$m : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \times (\mathbb{R}^n - \{0\}) \to \mathbb{R}^n - \{0\}$$

La condition (1) implique que cette multiplication passe au quotient et induit une multiplication $\overline{m}$ sur $\mathbb{RP}^{n-1} = (\mathbb{R}^n - \{0\})/\mathbb{R}^\times$. Enfin la condition (2) implique que $\overline{m}$ est une multiplication unitaire sur $\mathbb{RP}^{n-1}$. Il suffit donc d'appliquer le théorème précédent. □

Remarque 8.29. L'algèbre des nombres complexes, des quaternions et des octonions donnent des exemples de multiplication sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^8$ satisfaisant les conditions du corollaire. On peut en fait montrer en utilisant des outils de topologie algébrique plus sophistiqués que ce sont les seuls exemples.

CHAPITRE 9

Le théorème de de Rham

Le but de ce chapitre est de donner une preuve du théorème de de Rham qui affirme que la cohomologie de de Rham est naturellement isomorphe à la cohomologie singulière à coefficients réels.

1. Théorie (co)homologique des varités

On note **Var** la catégorie des variétés différentiables paracompactes à base dénombrable. Le point essentiel pour nous est le Théorème suivant.

THÉORÈME 9.1. *Tout objet M de* **Var** *admet un recouvrement ouvert au plus dénombrable $\{U_i\}_{i\in I}$ tel que, pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$, l'ouvert $U_J := \cap_{j\in J} U_j$ est ou bien vide, ou bien difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ pour un certain n.*

PREUVE. On donne simplement une esquisse de preuve. L'hypothèse de paracompacité nous assure l'existence d'une métrique Riemannienne sur M. Pour chaque point x de M, on peut choisir un voisinage U_x de x géodésiquement convexe (c'est à dire que pour deux points y et y' de U_x, il existe une unique géodésique les reliant qui soit entièrement contenue dans U_x). Un ouvert géodésiquement convexe est difféomorphe à un disque de $\mathbb{R}^n$ (et donc à $\mathbb{R}^n$) et une intersection finie de tels ouverts est encore géodésiquement convexe. Par dénombrabilité de de la base de M, on peut se restreindre à une recouvrement dénombrable. □

Un recouvrement ouvert satisfaisant la condition du théorème ci-dessus est appelé un *bon recouvrement.* On introduit alors une sous-catégorie de **Var**. On dit que M appartient à $\mathbf{Var}^{fin}$ si M admet un bon recouvrement fini (c'est le cas si M est compact).

On introduit maintenant la notion de théorie homologique et cohomologique sur les variétés. Une théorie homologique sur les variétés est un foncteur $F : \mathbf{Var} \to \mathbf{Ch}_*(R)$ satisfaisant les axiomes suivants.

(H0) On a $F(\varnothing) \cong 0$.

(H1) Pour tout d, l'application $\mathbb{R}^d \to pt$ induit un isomorphisme

$$H_*(F(\mathbb{R}^d)) \to H_*F(pt))$$

(H2) Si $X = M \sqcup N$, alors l'application évidente

$$H_*(F(M)) \oplus H_*(F(N)) \to H_*(F(X))$$

est un isomorphisme.

(H3) Si $U \subset X$ est l'inclusion d'un ouvert, alors l'application induite $F(U) \to F(X)$ est injective.

(H4) Si $X = U \cup V$ est un recouvrement ouvert, on note $F^{U,V}(X)$ le conoyau du morphisme

$$F(U \cap V) \to F(U) \oplus F(V)$$

induit par les deux inclusions $U \cap V \to U$ et $U \cap V \to V$. Alors le morphisme

$$F^{U,V}(X) \to F(X)$$

induit un isomorphisme en homologie.

(H5) Si $X = \cup_n U_n$ est une union croissante d'ouverts, alors le morphisme évident

$$\mathrm{colim}_n H_*(F(U_n)) \to H_*(F(X))$$

est un isomorphisme.

On a une définition analogue pour les foncteurs cohomologiques. Un foncteur cohomologique est un foncteur $\mathbf{Var}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ch}^*(R)$ satisfaisant les axiomes suivants

(C0) On a $F(\varnothing) \cong 0$.
(C1) Pour tout d, l'application $\mathbb{R}^d \to pt$ induit un isomorphisme

$$H^*(F(pt)) \to H^*(F(\mathbb{R}^d))$$

(C2) Si $X = M \sqcup N$, alors l'application évidente

$$H^*(F(X)) \to H^*(F(M)) \oplus H^*(F(N))$$

est un isomorphisme.
(C3) Si $U \subset X$ est l'inclusion d'un ouvert, alors l'application induite $F(X) \to F(U)$ est surjective.
(C4) Si $X = U \cup V$ est un recouvrement ouvert, on note $F^{U,V}(X)$ le noyau du morphisme

$$F(U) \oplus F(V) \to F(U \cap V)$$

induit par les deux inclusions $U \cap V \to U$ et $U \cap V \to V$. Alors le morphisme

$$F(X) \to F^{U,V}(X)$$

induit un isomorphisme en cohomologie.

Remarque 9.2. On ne donne pas d'axiome (C5) analogue de l'axiome (H5). La raison est qu'il faudrait remplacer la colimite par une limite. Une difficulté est que les limites ne commutent pas au passage aux groupes de cohomologie. Le prix à payer est que notre théorème principal ci-dessous dans le cas cohomologique ne sera pas vrai sur **Var** tout entier mais seulement sur la sous-catégorie $\mathbf{Var}^{fin}$.

Théorème 9.3. *Soient F et G deux foncteurs de* **Var** *vers* $\mathbf{Ch}_*(R)$ *satisfaisant les axiomes (H0) à (H5). Soit α une transformation naturelle $F \to G$. Supposons que α induise un isomorphisme $H_*(F(pt)) \cong H_*(G(pt))$. Alors α induit un isomorphisme $H_*(F(X)) \cong H_*(G(X))$ pour tout $X \in$* **Var***.*

Théorème 9.4. *Soient F et G deux foncteurs de $(\mathbf{Var})^{\mathrm{op}}$ vers $\mathbf{Ch}_*(R)$ satisfaisant les axiomes (C0) à (C4). Soit α une transformation naturelle $F \to G$. Supposons que α induise un isomorphisme $H_*(F(pt)) \cong H_*(G(pt))$. Alors α induit un isomorphisme $H_*(F(X)) \cong H_*(G(X))$ pour tout $X \in \mathbf{Var}^{fin}$.*

Les deux théorèmes se démontrent de manière tout à fait analogue, on ne traitera donc que le premier cas.

Preuve. On appelle une variété X α-bonne si α induit un isomorphisme

$$H_*(F(X)) \cong H_*(G(X))$$

Par hypothèse *pt* est α-bonne. On a aussi par l'axiome (H0) que $\varnothing$ est α bonne. L'axiome (H1) montre que $\mathbb{R}^d$ est α-bonne pour tout d. L'axiome (H2) montre que les variétés α-bonnes sont stables par union disjointe. Par une application facile du lemme des cinqs, l'axiome (H4) montre que si $X = U \cup V$ et U, V et $U \cap V$ sont α-bonnes, alors X est α-bonne. On peut alors montrer par récurrence sur le nombre d'ouverts d'un bon recouvrement que toutes les variétés de $\mathbf{Var}^{fin}$ sont α-bonnes. En effet, si $X = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n$ est un bon recouvrement de taille n de X. On peut poser $U = U_1$ et $V = U_2 \cup \ldots \cup U_n$. Ces deux variétés sont α-bonnes par l'hypothèse de récurrence. Par ailleurs $V \cap U = (U_1 \cap U_2) \cup \ldots \cup (U_1 \cap U_n)$ admet un bon recouvrement de taille $n-1$ donc est également α-bonne par l'hypothèse de récurrence.

Maintenant si $X \in \mathbf{Var}$ est quelconque. Par le Théorème 9.1, on peut trouver un bon recouvrement dénombrable que l'on peut supposer indexé par $\mathbb{N}$:

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

On note alors $V_n = \cup_{i \leq n} U_i$. Chaque variété V_n est α-bonne. Par l'axiome (H5) $X = \bigcup_n V_n$ est α-bonne. $\square$

2. Chaînes singulières lisses

Pour une variété X, on dispose du complexe $C_*(X;R)$ qui satisfait les axiomes (H1) à (H5). On va introduire un sous complexe $C^l_*(X,R)$ des chaînes singulières lisses dans X. On voit Δ^n comme une partie de $\mathbb{R}^n$. Une application continue $f : \Delta^n \to X$ est dite lisse si il existe un extension $\tilde{f} : U \to X$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant Δ^n. Le R-module $C^l_n(X;R)$ est le sous-module de $C_n(X;R)$ dont une base est donnée par les applications lisses $\Delta^n \to X$. On vérifie sans peine que la différentielle de $C_*(X;R)$ se restreint bien en une différentielle sur $C^l_*(X;R)$. On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 9.5. *Le functeur $X \mapsto C^l_*(X;R)$ satisfait les axiomes (H0) à (H5).*

PREUVE. Les axiomes (H0) (H2) et (H3) sont évidents. Pour l'axiome (H5), on se donne une application lisse $f : \Delta^n \to X$. Cette application se prolonge en $\tilde{f} : U \to X$. Par compacité de Δ^n, f se factorise par U_i pour un certain i. En notant $V = U \cap \tilde{f}^{-1}(U_i)$, on observe que $\tilde{f}$ restreint à V est une application lisse de V dans U_i qui étend f. On a donc une égalité

$$C^l_*(X;R) \cong \mathrm{colim}_n C^l_*(U_n;R)$$

L'axiome (H5) découle donc de la preuve de la Proposition 6.11.

On observe que le foncteur $C^l_*(X;R)$ se factorise par la catégorie des R-modules simpliciaux. La transformation naturelle d'Eilenberg-Zilber nous donne donc une transformation naturelle de foncteurs de X et Y :

$$C^l_*(X;R) \otimes_R C^l_*(Y;R) \to C^l_*(X \times Y;R)$$

On peut alors montrer exactement comme pour l'homologie singulière classique un théorème d'invariance par homotopie qui montre en particulier que pour tout X, la projection $X \times \mathbb{R} \to X$ induit un isomorphisme en homologie. On en déduit l'axiome (H1).

Enfin l'axiome (H4) est simplement une version lisse du théorème des petites chaînes et se démontre exactement de la même manière. □

On en déduit alors le résultat suivant.

THÉORÈME 9.6. *L'inclusion $C^l_*(X;R) \to C_*(X;R)$ induit un isomorphisme en homologie pour toute variété X.*

PREUVE. Par le Théorème 9.3, il suffit de vérifier que cette inclusion induit un isomorphisme pour l'homologie du point ce qui est évident. □

3. Le théorème de de Rham

Rappellons que l'on dispose d'un foncteur $\Omega^*(X)$ de la catégorie $\mathbf{Var}^{\mathrm{op}}$ vers la catégorie $\mathbf{Ch}^*(\mathbb{R})$ des complexes de cochaînes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Un élément de $\Omega^n(X)$ est la donnée pour chaque pair (U,ϕ) où U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $\phi : U \to X$ une application lisse d'une forme différentielle $\omega_{U,\phi}$ de degré n sur U. Ces données doivent par ailleurs satisfaire à une condition de compatibilité lorsque les deux ouverts de X considérés s'intersectent.

PROPOSITION 9.7. *Le foncteur $X \mapsto \Omega^*(X)$ satisfait les axiomes (C0) à (C4).*

PREUVE. Les axiomes (C0), (C2) et (C3) sont évidents. L'axiome (C4) exprime simplement que la donnée d'une forme différentielle sur U et d'une forme différentielle sur V qui coïncident sur $U \cap V$ est exactement la donnée d'une forme différentielle sur X. L'axiome (C1) est appelé le lemme de Poincaré, il dit que toute forme différentielle fermée sur $\mathbb{R}^d$ est exacte (i.e. tout cocycle est un cobord). □

On va maintenant construire une transformation naturelle

$$\Omega^*(X) \to C^*_l(X)$$

où $C^*_l(X)$ désigne le dual de $C^l_*(X;\mathbb{R})$ (l'anneau de coefficients $\mathbb{R}$ sera toujours sous-entendu dans cette section).

Pour $\omega = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$ une forme différentielle définie sur un voisinage du n-simplexe dans $\mathbb{R}^n$, on peut définir l'intégrale de ω sur Δ^n comme l'intégrale suivante

$$\int_{\Delta^n} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1\ldots dx_n$$

Plus généralement, si $\omega \in \Omega^n(X)$ et $\sigma : \Delta^n \to X$ est une application lisse, on pose

$$\int_\sigma \omega := \int_{\Delta^n} \sigma^*\omega$$

Enfin, on étend cette procédure à une combinaison linéaire formelle $\sigma = \sum_i a_i\sigma_i$ par la formule

$$\int_\sigma \omega = \sum_i a_i \int_{\sigma_i} \omega$$

On définit de la sorte, pour tout n, une application linéaire

$$I : \Omega^n(X) \to C_l^n(X)$$

qui envoie ω sur la forme linéaire $\sigma \mapsto \int_\sigma \omega$. Il reste à vérifier que ce morphisme est compatible à la différentielle qui existe des deux côtés. C'est simplement la formule de Stokes :

Théorème 9.8. *Soit ω un élément de $\Omega^{n-1}(X)$, $\sigma : \Delta^n \to X$ une application lisse (ou plus généralement un élément de $C_n^l(X)$). Alors on a la formule*

$$\int_{d\sigma} \omega = \int_\sigma d\omega$$

On peut maintenant prouver le résultat principal.

Théorème 9.9. *La transformation naturelle I induit un isomorphisme*

$$H^*_{dR}(X) \cong H^*(X;\mathbb{R})$$

pour toute variété X dans $\mathbf{Var}^{fin}$

Preuve. Tout d'abord par la section précédente, on sait que la cohomologie du complexe $C_l^*(X)$ est bien naturellement isomorphe à $H^*(X;\mathbb{R})$. Il suffit donc de montrer que la transformation naturelle I induit un isomorphisme en cohomologie pour $X = pt$. $\square$

Table des matières